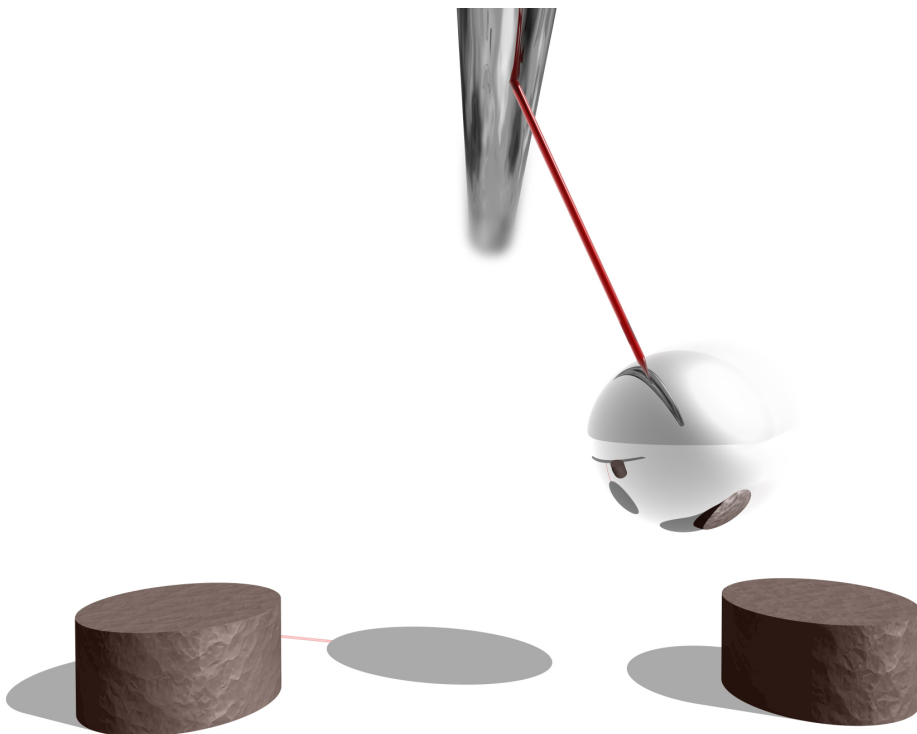


# FC3 - Duffing Oszillator

4. Oktober 2007



Universität Paderborn - Theoretische Physik

Autor: Stephan Blankenburg, Björn Lange  
Datum: 4. Oktober 2007

## 1 Theorie komplexer Systeme

Der Begriff „Theorie komplexer Systeme“ bezeichnet eine umfassende Theorie, in der die Chaostheorie nur einen Teil darstellt. Ursprünglich ist der Begriff in der statistischen Mechanik verortet, wie es schon im vorigen Versuch zu erkennen war. Diese behandelt Systeme mit großer Anzahl von Teilchen, die nicht mehr trivial bzw. linear untereinander wechselwirken. Hierbei treten unterschiedliche und zum Teil chaotische Effekte auf. Schließlich kommt es zu Selbstorganisationsprozesse, wie im Falle eines Wassertropfens.

Auch im Beispiel der Planetenbewegungen kommt es zu nicht linearen Wechselwirkungen. Betrachtet man zwei Planeten, ist die Lösung der Differentialgleichung noch trivial. Zieht man beispielsweise die Sonne mit in Betracht, lässt sich das System nur noch mit Hilfe von iterativen Gleichungen lösen. Da es in diesem Fall labile energetische Tiefpunkte gibt, kann es zum chaotischen Verhalten kommen.

## 2 Fraktale - Das Sierpinski Dreieck

Der etymologische Ursprung des Wortes Fraktal liegt im lateinischen „fractus“, was soviel bedeutet wie „gebrochen“. Geprägt wurde der Begriff durch Benoît Mandelbrot und bezeichnet natürliche bzw. künstliche Gebilde, die einen hohen Grad von Selbstähnlichkeit aufweisen. Beispielsweise bildet ein Blumenkohl ein Fraktal, da seine Röschen in der Form dem des ganzen Kopfes ähneln. Diese wiederum lassen sich auch wieder in kleine Röschen zerlegen, die ihrem Ursprung ähneln. Das bedeutet, auch wenn man ein Fraktal sehr stark vergrößert, zeigt es gleiche Strukturen wie vor der Vergrößerung.

Ein bekanntes klassisches Fraktal bildet das nachdem polnischen Mathematiker Waclaw Sierpinski benannte Sierpinski-Dreieck. Dieses wird wie folgt konstruiert: Man beginnt mit einem Dreieck in der Ebene. Nun werden die Mittelpunkte der drei Seiten miteinander verbunden, so dass vier kongruente Dreiecke entstehen. Nun wird das dasselbe Schema auf die drei erhaltenen äußeren Dreiecke angewandt. Man beginnt sich iterativ dem Sierpinski-Dreieck zu nähern. Neben dieser klassischen Methode zur Konstruktion, gibt es auch eine andere Möglichkeit für die Erstellung. Dazu definiert man drei Punkte  $p_i$  im Raum (möglichst die Eckpunkte eines Dreiecks) und weist ihnen jeweils eine Zahl zu. Nun startet man mit einem beliebigen Punkt  $P$  und bestimmt zufällig einen der drei Punkte  $p_i$ . Auf der Hälfte der Strecke von Punkt  $P$  zum speziellen Punkt  $p_j$  wird ein schwarzer Punkt gezeichnet. Anschließend wird dieser Prozess iterativ fortgeführt, wobei jeweils der gezeichnete Punkt als neuer Startpunkt zu sehen ist.

Da Fraktale unter anderem derart komplex sein können, dass die üblichen Messbegriffe ihren Sinn verlieren, gilt es nun eine neue Maßeinheit zu definieren. Hierbei gibt es die Möglichkeit, den Grad der Komplexität zu messen, unter Berücksichtigung der Längen-, Oberflächen- oder Volumenänderung bei immer kleineren Maßstäben. Hierfür gibt es mehrere Dimensionsbegriffe, wobei an dieser Stelle sich auf der der Selbstähnlichkeits-Dimension beschränkt wird. Dieser wird aus dem Verkleinerungsfaktor  $s$  und der Anzahl

der Teile  $a$ , in welche die Struktur zerlegt werden kann, bestimmt:

$$a = \frac{1}{s^D} \Leftrightarrow D = \frac{\ln a}{\ln s^{-1}}. \quad (1)$$

### Aufgaben zur Vorbereitung

- Machen Sie sich mit den Begrifflichkeiten aus dem Text vertraut.
- Schauen Sie sich in der Literatur die Koch'sche Schneeflocke genauer an.

### Aufgaben

- Programmieren Sie eine Darstellung des Sierpinski Dreiecks in C und stellen Sie diese anschließend mit einem Grafikprogramm dar.
- Berechnen Sie die Selbstähnlichkeits-Dimension des Dreiecks.

## 3 Bifurkationen - Populationsdynamik

Bifurkationen, bzw. Verzweigungen bezeichnen eine Zustandsänderung eines nichtlinearen Systems unter Einfluss eines definierten Parameters. Der Begriff wurde ursprünglich von Henri Poincaré eingeführt. Ein klassisches Beispiel stellt hier die Populationsdynamik dar. Hier betrachtet man eine Fuchspopulation mit einer gewissen Geburtenrate  $b$ . Da diese Population natürlich durch die Nahrungsverfügbarkeit begrenzt wird, kommt es zur so genannten logistischen Abbildung:

$$x_{n+1} = bx_n(1 - x_n). \quad (2)$$

Ausgehend von einem exponentiellen Wachstum

$$\frac{dx}{dt} = rx \quad (3)$$

wird hinführend zum logistischen Wachstum zusätzlich eine Kapazität  $k$  eingeführt:

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{k}\right). \quad (4)$$

Die Diskretisierung der Differentialgleichung 4 führt zu der zuvor erwähnten Gleichung 2. Variiert man nun die Geburtenrate, kommt es zu entsprechenden Gleichgewichten nach einer bestimmten Zeit. Diese lassen sich in einem Bifurkations-Diagramm darstellen, wobei hier die Abszisse die Geburtenrate  $b$  und die Ordinate den Gleichgewichtszustand darstellt. Dabei kommt es bei dynamischen Systemen meist zu einer Periodenverdopplung, sobald ein kritischer Punkt überschritten ist.

### Aufgaben zur Vorbereitung

- Machen Sie sich mit den Begrifflichkeiten aus dem Text vertraut.
- Schauen Sie sich in der Literatur den Begriff des Attraktors an.

### Aufgaben

- Programmieren Sie die Populationsdynamik und visualisieren Sie anschließend die erhaltenen Ergebnisse in einem Bifurkations-Diagramm (Startwert der Population  $p_0 = 0.5$ ).

## 4 Physikalische Systeme - Der Duffing Oszillator

Im Folgenden soll nun ein physikalisches nichtlineares System betrachtet werden. Es handelt sich um den Duffing-Oszillator (harmonischer Oszillator mit weicher Feder), der in der Realität über ein Fadenpendel und zwei Permanentmagneten realisiert werden kann. Die zugehörige Differentialgleichung lautet:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha_1 x + \alpha_2 x^3 = 0, \quad (5)$$

mit den Konstanten  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$ . Die treibende Kraft des Oszillators ist folglich

$$F(x) = -\alpha_1 x - \alpha_2 x^3, \quad (6)$$

mit dem zugehörigen Potential

$$V(x) = \frac{\alpha_1}{2} x^2 + \frac{\alpha_2}{4} x^4. \quad (7)$$

Für den Fall  $\alpha_1 < 0$  und  $\alpha_2 > 0$  erhält man drei Extrema ( $x = 0$  und  $x = \pm \sqrt{-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}$ ) für das System. Wie in Abbildung 1 zu erkennen ist, existieren zwei Minima und ein labiler Punkt am Nullpunkt, es entsteht ein so genanntes Doppelmuldenpotential.

Die Definition des allgemeinen Duffing-Oszillators lautet nun wie folgt:

$$\ddot{x} + r\dot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = f \cos(\Omega t), \quad (8)$$

mit den Konstanten:

- r Reibungsparameter
- $\omega_0$  Eigenfrequenz
- $\beta$  Stärke der Nichtlinearität
- f Stärke der von aussen treibenden Kraft
- $\Omega$  Frequenz der von aussen treibenden Kraft

Dynamische Systeme lassen sich an dieser Stelle mit dem so genannte Poincaré-Schnitt näher untersuchen. Hierbei wird durch eine stroboskopische Aufnahme des Phasenraums

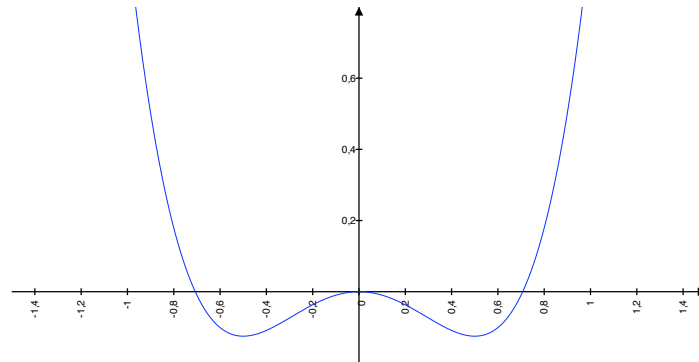


Abbildung 1: Doppelmulden-Potential des reibungsfreien Duffing-Oszillators.

eine diskrete Anzahl von Punkten erstellt. Der Poincaré-Schnitt hat den Vorteil, dass er aufgrund der kleineren Datenmenge einfacher zu untersuchen ist.

Abhängig von der Wahl der Parameter kann es nun zu einem chaotischen Verhalten der Oszillators kommen. Wie bereits erwähnt, lassen sich diese Systeme mit der fraktalen Dimension beschreiben. Allerdings stellt sich hier die Anwendung der Selbstähnlichkeits-Dimension als nicht durchführbar heraus. Daher benutzt man die so genannte Korrelations-Dimension. Da der Attraktor durch die im Phasenraum dichtliegenden Punkte definiert ist, lässt sich ein Größe  $C(R)$  definieren als:

$$C(R) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_i j^N \Theta(R - |x_i - x_j|). \quad (9)$$

Hierbei wird jeder Längeneinheit  $R$  die Zahl von Punktepaaren zugeordnet deren Abstand zueinander kleiner als  $R$  ist. Damit lässt sich die Dimension mit Hilfe des Potenz-Gesetzes aus 1 bestimmen:

$$D = \frac{\ln C(R)}{\ln R}. \quad (10)$$

Um nun die numerische Modellierung des Problems anzugehen, soll im Folgenden das

Runge-Kutta Verfahren 4. Ordnung verwendet werden:

$$\begin{aligned}
 k_1 &= hf(t_n, x_n, v_n) \\
 l_1 &= hg(t_n, x_n, v_n) \\
 k_2 &= hf\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_1}{2}, v_n + \frac{l_1}{2}\right) \\
 l_2 &= hg\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_1}{2}, v_n + \frac{l_1}{2}\right) \\
 k_3 &= hf\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_2}{2}, v_n + \frac{l_2}{2}\right) \\
 l_3 &= hg\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_2}{2}, v_n + \frac{l_2}{2}\right) \\
 k_4 &= hf\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_3}{2}, v_n + \frac{l_3}{2}\right) \\
 l_4 &= hg\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_3}{2}, v_n + \frac{l_3}{2}\right) \\
 x_{n+1} &= x_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) + \mathcal{O}(h^5) \\
 v_{n+1} &= v_n + \frac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4) + \mathcal{O}(h^5), \tag{11}
 \end{aligned}$$

mit  $\dot{x} = f(t, x, v)$  und  $\dot{v} = g(t, x, v)$ .

### Aufgaben

- Programmieren Sie die Simulation des Duffing-Oszillators mit Hilfe des Runge-Kutta Verfahrens 4. Ordnung.
- Realisieren Sie den freien Duffing Oszillator ( $f = 0.0$ ) ohne treibende Kraft von aussen mit folgenden Parametern:
  - einfacher fokaler Grenzpunkt:  $\omega_0^2 \geq 0$ ,  $r > 0$ 
    - (1)  $r=0.1$ ,  $\omega_0^2=\beta=\Omega=0.0$ ,  $f=0.0$ ,  $x_0=1.5$ ,  $v_0=0.0$
  - zwei fokale Grenzpunkte (Doppelmulden-Potential):  $\omega_0^2 \leq 0$ 
    - (2)  $r=0.0$ ,  $\omega_0^2=-\beta=\Omega=1.0$ ,  $f=0.0$ ,  $x_0=1.0\dots 1.5$ ,  $v_0=0.0$
    - (3)  $r=0.1$ ,  $\omega_0^2=-\beta=\Omega=1.0$ ,  $f=0.0$ ,  $x_0=1.5\dots 1.6$ ,  $v_0=0.0$
- Realisieren Sie den Ueda Oszillator als spezielle Form des Duffing-Oszillators ( $\Omega = 1.0$ ,  $\omega_0^2 = 0.0$ ). Es wird sichtbar, dass für diese Form es zu stabile koexistierenden Grenzzyklen und seltsamen Attraktoren in Abhängigkeit von den Parametern kommt. Zeichnen Sie aus diesem Grund jeweils die Trajektorie und den zugehörigen Poincaré-Schnitt mit der Frequenz  $\Omega$  nach entsprechender Einschwingzeit.
  - stabile koexistierende Grenzzyklen mit verschiedenen Perioden
    - (1)  $r=0.08$ ,  $\omega_0^2=0.0$ ,  $\beta=\Omega=1.0$ ,  $f=0.2$ ,  $x_0=1.0$ ,  $v_0=0.0$ : stabiler Einergrenzzyklus
    - (2)  $r=0.08$ ,  $\omega_0^2=0.0$ ,  $\beta=\Omega=1.0$ ,  $f=0.2$ ,  $x_0=-0.7$ ,  $v_0=0.0$ : stabiler Zweiergrenzzyklus
    - (3)  $r=0.08$ ,  $\omega_0^2=0.0$ ,  $\beta=\Omega=1.0$ ,  $f=0.2$ ,  $x_0=-1.0$ ,  $v_0=0.0$ : stabiler Dreiergrenzzyklus

- seltsamer Attraktor

(4)  $r=0.05, \omega_0^2=0.0, \beta=\Omega=1.0, f=7.5, x_0=1.5, v_0=0.0$ : seltsamer Attraktor

- Realisieren Sie den getriebenen Duffing-Oszillator. Hierbei soll die Bifurkation bzw. Periodenverdopplung verdeutlicht werden (Variation des Parameters  $f$ ). Zeichnen Sie auch hier die Trajektorie und den Poincaré-Schnitt erst nach der Einschwingzeit.

(1)  $r=0.25, \omega_0^2=-1.0, \beta=1.0, f=0.35, \Omega=1.4, x_0=1.0, v_0=0.0$ : Einerperiode

(2)  $r=0.25, \omega_0^2=-1.0, \beta=1.0, f=0.37, \Omega=1.4, x_0=1.0, v_0=0.0$ : Zweierperiode

(3)  $r=0.25, \omega_0^2=-1.0, \beta=1.0, f=0.39, \Omega=1.4, x_0=1.0, v_0=0.0$ : Dreierperiode

(4)  $r=0.25, \omega_0^2=-1.0, \beta=1.0, f=0.40, \Omega=1.4, x_0=1.0, v_0=0.0$ : seltsamer Attraktor

- Berechnen Sie die Korrelationsdimension im Falle des seltsamen Attraktors am Beispiel des Ueda-Oszillators ( $r=0.05, \omega_0^2=0.0, \beta=\Omega=1.0, f=7.5, x_0=1.5, v_0=0.0$ ). Zu diesem Zweck bestimmen Sie die Steigung der von  $\ln C(R)$  über  $\ln R$  aufgetragenen Geraden.