Analyse von Integrationsproblemen der Gesellschaft mit Methoden der Physik

Schriftliche Hausarbeit

vorgelegt im Rahmen der Ersten Staatsprüfung für das Lehramt

für die **Sekundarstufe II und I**

im Fach **Physik**

von

Christian Denk

Paderborn, den 16. Juni 2002

Gutachter: Prof. Dr. Jürgen Mimkes

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung 4

2 Mathematische Grundlagen der Lagrange-Statistik 6

2.1 Statistik ohne Nebenbedingungen 6

2.1.1 Ein Beispiel aus der Statistik 6

2.1.2 Ein Beispiel aus der Gesellschaft 9

2.2 Statistik mit Nebenbedingungen: Lagrange-Statistik 11

2.2.1 Die Lagrange-Funktion 11

2.2.2 Die modifizierte Lagrange-Funktion 11

2.2.3 Entropie und Ordnung, Unordnung, Chaos 12

2.3 Die allgemeine Lagrange-Funktion 19

3 Die Lagrange-Funktion als freie Energie 20

3.1 Das Lagrange-Prinzip in der Physik 20

3.2 Die Gibbssche Phasenregel 21

4 Anwendung der Lagrange-Funktion auf physikalische Prozesse 23

4.1 Das homogene System 23

4.1.1 Die drei Aggregatzustände 23

4.1.2 Phasenübergang 1. Ordnung (fest – flüssig) 24

4.2 Das heterogene (binäre) System 27

4.2.1 Das Modell der binären regulären Mischung 27

4.2.2 Kristallstrukturen 29

4.2.3 Die Lagrange-Funktion eines binären physikalischen Systems 33

4.2.4 Bedeutung von T in der Physik 34

4.3 Das Phasendiagramm eines binären physikalischen Systems 36

4.4 Beispiele für physikalische Phasendiagramme 39

4.4.1 Gold – Platin 39

4.4.2 Leerstellen – Atome im Gitter 41

5 Anwendung der Lagrange-Funktion auf gesellschaftliche Prozesse 44
5.1 Die homogene Gesellschaft 44
5.1.1 Die drei Staatsformen 44
5.1.2 Phasenübergang 1. Ordnung (Hierarchie – Demokratie) 45
5.2 Die heterogene (binäre) Gesellschaft 49
5.2.1 Das Modell der regulär gebundenen Gesellschaft 49
5.2.2 Gesellschaftsstrukturen 49
5.2.3 Die Lagrange-Funktion einer binären Gesellschaft 54
5.2.4 Bedeutung von T in der Gesellschaft 55
5.3 Das Phasendiagramm einer binären Gesellschaft 56
5.4 Beispiele für gesellschaftliche Phasendiagramme 59
5.4.1 Katholiken – Protestanten – Sonstige 59
5.4.2 Katholiken – Nichtkatholiken 64
5.4.3 Deutsche – Ausländer 69
5.4.4 Weiße, Schwarze, Sonstige 73
5.5 Die Scheidungsrate als Leerstellen der Gesellschaften 76
5.6 Beispiele für die Messung der sozialen Temperatur 79

6 Zusammenfassung 81

7 Anhang 82
7.1 Anhang A (Boltzmann-Verteilung) 82
7.2 Anhang B (Konzentration x ist Ableitung) 84
7.3 Anhang C (Katholiken, Protestanten, Sonstige) 85
7.4 Anhang D (Deutsche – Ausländer) 89
7.5 Anhang E (Weiße, Schwarze, Sonstige) 91

8 Literaturverzeichnis 94

1 Einleitung

Mit dem Bericht "Zuwanderung gestalten – Integration fördern" vom 4. Juli 2001 hat die unabhängige Kommission "Zuwanderung" die Ergebnisse ihrer Arbeit vorgelegt. In diesem Bericht sind alle Fakten, Daten und Hintergründe zu den Themen "Zuwanderung" und "Integration" zusammengestellt. Weiterhin wird ausführlich diskutiert, warum Zuwanderung gerade in der heutigen Zeit so relevant ist. Es werden Vorschläge für die zukünftige Zuwanderungspolitik gemacht.

Die Kommission versucht also wichtige gesellschaftliche Fragestellungen wie bspw. die Eindämmung von rechtsradikalen Straftaten mit Hilfe von Gesellschaftswissenschaften zu beantworten. Es stellt sich dabei die Frage, ob nicht auch andere Wissenschaften zur Lösung dieser Probleme beitragen können. Ziel dieser Staatsexamensarbeit ist es, diesen gesellschaftlichen Fragestellungen eine *naturwissenschaftliche* Grundlage zu geben.

Die Staatsexamensarbeit trägt den Titel "Analyse von Integrationsproblemen der Gesellschaft mit Methoden der Physik". Der Titel impliziert die Frage: Kann man physikalische Methoden, Modelle und Gleichungen auf Menschen anwenden?

Im ersten Moment sollte man meinen, dass sich die Frage sehr schnell beantworten lässt, nämlich mit "Nein". Gesellschaft – Physik: Da treffen doch zwei Bereiche aufeinander, die nichts gemeinsam haben. Menschen in einer Gesellschaft und Atome in der Physik sind doch völlig unterschiedlich beschaffen!

Zunächst soll allerdings ein weiteres Problem gelöst werden: Der Lebensweg eines Einzelnen ist nicht vorhersehbar; wie sollen dann erst die Lebenswege *vieler* Menschen beschrieben werden?

Die Lösung ist erstaunlich, denn genau das ist möglich: je *größer* die Zahl der Personen ist, desto *genauer* wird die Vorhersage! Ein berühmtes Beispiel aus der Wahrscheinlichkeitstheorie, das diese Tatsache wunderschön verdeutlicht, ist das Galton-Brett. Die Wege der einzelnen Kugeln, die dort den Parcours durchlaufen, sind nicht vorhersehbar. Nach Durchlauf aller Kugeln jedoch nimmt die Verteilung der Kugeln in den Auffangbehältern eine ganz bestimmte Form an. Bei mehrmaligem Durchlauf ergibt sich immer wieder dieselbe Verteilung. Das Galton-Brett wird in Kapitel 2.1.1 ausführlich erläutert.

Während in der Gesellschaft eine große Anzahl von Personen betrachtet wird, so betrachtet man in der Physik – speziell in der Thermodynamik – eine große Anzahl von Atomen. Mathematisch gesehen ist Thermodynamik nichts anderes als Statistik atomarer Systeme. Behandelt man die Sozio-Ökonomie mit Methoden der Physik, so betreibt man Statistik sozio-ökonomischer Systeme. In der Statistik kommt es nicht auf die Art der Teilchen an, sondern auf ihre Anzahl. Je größer diese Anzahl ist, desto genauer sind die Ergebnisse der Statistik.

Die mathematischen Grundlagen sind für beide Systeme dieselben, nur die Meßmethoden sind unterschiedlich. Physik und Gesellschaft sind also mittels gemeinsamer Statistik miteinander verbunden. Wenn physikalische Gleichungen auf Gesellschaften angewendet werden, müssen sie jedoch in der Sozio-Ökonomie entsprechend anders interpretiert werden. Die experimentellen Ergebnisse müssen nun bestätigen, ob Physik und Gesellschaft tatsächlich äquivalent zueinander sind.

Diese Staatsexamensarbeit ist wie folgt aufgebaut:

Kapitel 2 stellt die mathematischen Grundlagen bereit. Dabei handelt es sich hauptsächlich um Statistik. Es wird sich zeigen, dass die "gewöhnliche" Statistik (Statistik ohne Nebenbedingungen) nicht mehr ausreicht, weshalb man zur Statistik mit Nebenbedingungen übergehen muss. Letztere bezeichnet man auch – nach ihrem Begründer – als Lagrange-Statistik. Die zentrale Rolle spielt dabei die Lagrange-Funktion. Auf dieser ist die gesamte Staatsexamensarbeit aufgebaut.

Kapitel 3 wiederholt die aus der Thermodynamik bekannten (oder unbekannten) Begriffe "Freie Energie" und "Gibbssche Phasenregel". Gerade der Begriff der "Phase" steht für Systeme, die nur aus einer Atomsorte bestehen, im Mittelpunkt.

Kapitel 4 ist ebenfalls ein "thermodynamisches Kapitel": Die Lagrange-Statistik wird nun auf Systeme, die aus einer und aus zwei Atomsorten bestehen, angewendet. Für das binäre System wird die Lagrange-Funktion mit Hilfe des Modells der regulären Mischung explizit berechnet.

Kapitel 5 wendet die Lagrange-Statistik nun nicht auf Atome, sondern auf Gesellschaften (also auf eine große Anzahl von Menschen) an. Um das Verständnis zu erleichtern, ist dieses Kapitel genauso aufgebaut wie Kapitel 4. Auch die Kapitelüberschriften ähneln sich, so dass auch dadurch schon deutlich wird, dass für Atome und Gesellschaften dieselben Gesetze gelten.

Kapitel 6 fasst die wichtigsten Ergebnisse der Arbeit noch einmal zusammen.

Kapitel 7 ist der Anhang. Hier findet man Herleitungen sowie zusätzliche Graphen, die zu Kapitel 5.4 gehören.

Auch Weidlich [22] hat sich mit den theoretischen Grundlagen der Gleichwertigkeit zwischen Thermodynamik und Sozio-Ökonomie beschäftigt; anstatt von Äquivalenz spricht er von *Isomorphie*. Während er nur auf die Theorie eingeht, sollen in dieser Staatsexamensarbeit auch experimentelle Ergebnisse diskutiert werden.

2 Mathematische Grundlagen der Lagrange-Statistik

2.1 Statistik ohne Nebenbedingungen

2.1.1 Ein Beispiel aus der Statistik

Im Allgemeinen ist es schwierig, Aussagen über *einzelne* Objekte zu machen. Dies gilt sowohl für Elementarteilchen in der Atomphysik als auch für Menschen in der Gesellschaft. Betrachtet man dagegen eine große Anzahl von Teilchen oder Personen, sollte man meinen, dass erst recht keine vernünftigen Ergebnisse zu erwarten sind. Doch genau das Gegenteil ist der Fall: je *größer* die Gesamtheit ist, desto *genauer* lassen sich Voraussagen treffen.

Dieser Sachverhalt soll an einem berühmten Beispiel aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung erläutert werden (vgl. [2], Kapitel 9.3.12.). Abbildung 1 zeigt das *Galton-Brett*[1]:

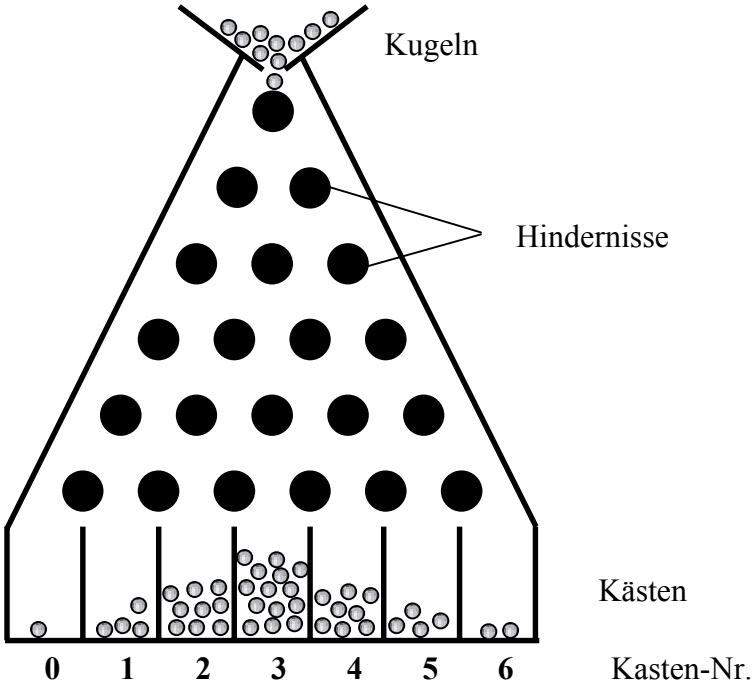


Abbildung 1: *Galton – Brett*. Mehrere kreisförmige Hindernisse sind pyramidenförmig angeordnet. Oberhalb der Hindernisse ist ein Behälter mit Kugeln angebracht, so dass die Kugeln genau auf die erste Barriere treffen. Sie können dort nur nach links oder rechts rollen und treffen in der nächsten Hindernisreihe auf dieselbe Situation usw. Unterhalb der Hindernisse befinden sich durchnummerierte Kästen, die die Kugeln auffangen.

[1] Sir Francis Galton, 1822 – 1911 (siehe [21])

Trifft eine Kugel auf das oberste Hindernis, so kann sie entweder nach links oder nach rechts rollen. Die Wahrscheinlichkeit dafür beträgt jeweils $1/2$. Nachdem die Kugel nach links oder rechts gerollt ist, trifft sie wieder auf ein Hindernis. Auch hier beträgt die Wahrscheinlichkeit für links oder rechts wieder $1/2$ usw. Dieser Prozess setzt sich solange fort, bis die Kugel in einem der unteren Kästen angekommen ist.

Der Weg, den eine Kugel benötigt, um vom ersten Hindernis bis zum Kasten zu gelangen, soll als "Hindernislauf" bezeichnet werden. *Welchen* Weg eine Kugel einschlagen wird, lässt sich nicht vorhersagen, da die Ablenkung nach beiden Seiten gleichwahrscheinlich ist. Betrachtet man Abbildung 1, so erkennt man jedoch, dass der Kasten links außen (Nr. 0) bzw. rechts außen (Nr. 6) nur von Kugeln erreicht wird, die nach jedem Hindernis stets nach links bzw. nach rechts abgelenkt werden. Diese beiden Zustände sind also recht unwahrscheinlich und werden entsprechend selten von Kugeln besetzt. Für Kugeln, die in den Kasten in der Mitte (Nr. 3) fallen, gibt es viele verschiedene Hindernisläufe. Die Kästen, in die die Kugeln hineinfallen, besitzen also unterschiedliche Wahrscheinlichkeiten.

Ganz allgemein lassen sich Wahrscheinlichkeiten mit folgender Formel berechnen:

$$W(N_1, N_2, \ldots, N_K) = \frac{N!}{N_1! \cdot N_2! \cdot \ldots \cdot N_K!} \cdot p_1^{N_1} \cdot p_2^{N_2} \cdot \ldots \cdot p_K^{N_K} \; ; \quad p_k = \frac{V_k}{V}, \; k = 1, \ldots, K \tag{1}$$

Dies ist die Formel für die *Multinomialverteilung* (vgl. [10], S. 30). Mit dieser Formel lässt sich die Frage beantworten, wie groß die Wahrscheinlichkeit einer Verteilung von N Kugeln ($N = N_1 + N_2 + ... + N_k$) auf K Kästen mit den Kastengrößen $V_1, V_2, ..., V_K$ ($V_1/V + V_2/V + ... + V_K/V = 1$) ist, wobei $N_1, N_2, ..., N_K$ die Anzahl der Kugeln pro Kasten bezeichnet? Für K = 2 wird aus der Multinomialverteilung die *Binomialverteilung* (siehe auch Kapitel 4.2.3).

Für das Galton-Brett wird ebenfalls die Formel für die Binomialverteilung benötigt, wobei die Variablen N, N_k und p_k anders interpretiert werden müssen. Ist n die Anzahl der Hindernisreihen (hier: n = 6), p die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis "Fall links" (p("Fall links") = p("Fall rechts") = $1/2$) und k die Nummer des Kastens (k = 0,...,n), so ergibt[2] sich als Wahrscheinlichkeit B(n; p; k)für das Eintreffen einer Kugel im Kasten k

$$B(n; p; k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \; ; \quad k \in \{0, 1, \ldots, n\}; \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \tag{2}$$

[2] vgl. [2], Kapitel 9.3.2

Der Binomialkoeffizient "N über k" gibt die Zahl *aller* Wege an, die eine Kugel benötigt, um nach n Hindernisreihen in den Kasten mit der Nummer k zu fallen. Aus Gleichung (2) lässt sich für *eine* Kugel ersehen, dass sie am wahrscheinlichsten von Kasten Nr. 3 aufgefangen wird und dass die Wahrscheinlichkeit zum Rand hin abnimmt. Weil beim Galton-Brett "p = 1 – p" ist, ändert sich nur der Binomialkoeffizient für unterschiedliche k-Werte.

Bei einer großen Anzahl von Kugeln geht man zur *Normalverteilung* über. Sie ist insofern in Abbildung 1 zu sehen, als dass die Kugeln in den Kästen die Fläche unterhalb des zur Normalverteilung zugehörigen Funktionsgraphen beschreiben. Diese Kurve zeigt Abbildung 2 auf Seite 8. Je größer die Anzahl der Kugeln ist, desto besser wird der Kurvenverlauf wiedergegeben. Eine Vergrößerung der Zahl der Hindernisreihen n (und damit eine Vergrößerung der Zahl der Kästen k) bewirkt eine zusätzliche Verbesserung der Genauigkeit.

Die Kurve, die die Normalverteilung beschreibt, wird *Gaußsche Glockenkurve*[3] genannt. Die zugehörige Funktion f hängt von den Werten x, vom Erwartungswert μ und von der Standardabweichung σ ab. Der zu erwartende Wert μ ist der wahrscheinlichste Wert und ergibt sich aus dem Maximum der Glockenkurve [2] [10].

Während zunächst nur Kugeln betrachtet worden sind, soll nun der Mensch im Mittelpunkt stehen. Ebenso wie für Kugeln lässt sich auch über den einzelnen Menschen und seinen Lebensweg nichts aussagen. Erst wenn man mehrere Personen und ihre Lebenswege in Augenschein nimmt, erhält man vernünftige Werte. Diese werden umso präziser, je größer die Anzahl der Personen ist.

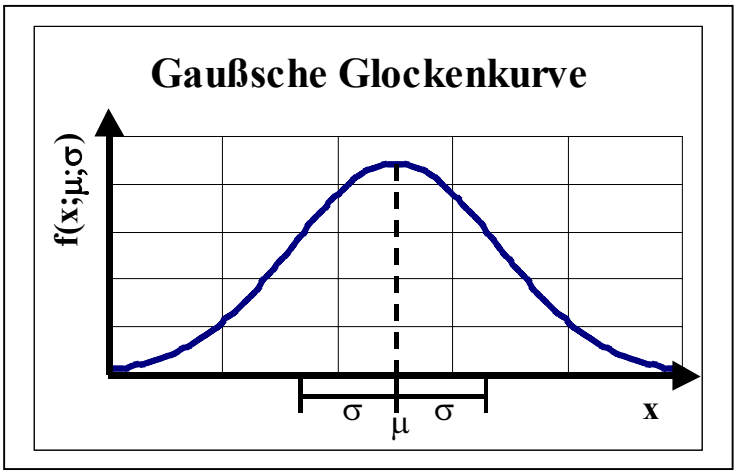


Abbildung 2: Die Gaußsche Glockenkurve wird durch die Funktionsvorschrift $f(x;\mu;\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ beschrieben.

[3] Carl Friedrich Gauß, 1777 – 1855, deutscher Mathematiker, Astronom, Geowissenschaftler und Physiker (siehe [5])

2.1.2 Ein Beispiel aus der Gesellschaft

Im folgenden Beispiel soll eine Verkehrsstraße betrachtet werden [11]. Wie werden sich 10 Personen auf die beiden Bürgersteige verteilen?

Da zwei Seiten vorhanden sind, ist davon auszugehen, dass auch beide Seiten genutzt werden. Eine Gleichverteilung der Personen auf beide Bürgersteige ist der wahrscheinlichste Zustand: er entspricht dem Maximum der Glockenkurve.

Dagegen wird die Möglichkeit, dass sich alle 10 Personen auf einer Seite der Straße befinden, unwahrscheinlich. Die Entfernung bis zum Maximum der Glockenkurve ist groß. Statistisch gesehen ist dieser Fall nur sehr selten zu erwarten (siehe unten).

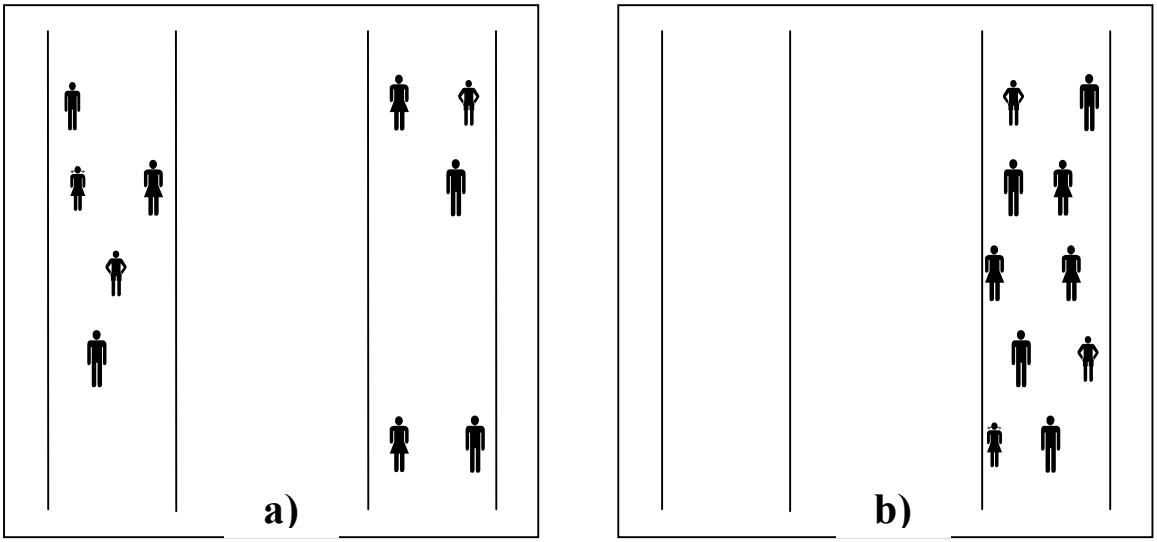


Abbildung 3: a) Die zu erwartende Verteilung von 10 Personen auf beide Bürgersteigen ist eine Gleichverteilung. Diese Verteilung (Personen gehen wahllos links und rechts) entspricht dem maximalen Wert der Gaußschen Glockenkurve. b) Alle Personen gehen nur auf einem Bürgersteig. Diese Verteilung ist sehr unwahrscheinlich und daher selten zu beobachten.

Die Wahrscheinlichkeit für die in Abbildung 3 a) und b) dargestellten Situationen berechnet sich am leichtesten mit der Formel für die Binomialverteilung (Gleichung (2)). Es ergeben sich folgende Werte:

a) $B(n = 10; p = 0{,}5; k = 5) = \binom{10}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 252 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = 24{,}6\ \%$

b) $B(n = 10; p = 0{,}5; k = 10) = \binom{10}{10} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = 0{,}1\ \%$

Möchte man aber erreichen, dass alle 10 Personen nur auf einem Bürgersteig entlanggehen, so muss man diesen Fall erzwingen. Dies funktioniert in diesem Beispiel am besten, wenn auf

der anderen Seite ein Verkehrsschild aufgestellt wird. Hierbei handelt es sich um ein Verbots- bzw. ein Gebotsschild, welches nun eine ganz bestimmte Verteilung der Personen auf die beiden Bürgersteige erzwingt. Es gebietet den Personen, ausschließlich den anderen Bürgersteig zu benutzen. Der in Abbildung 3 b) dargestellte unwahrscheinliche Fall ist also jetzt wahrscheinlich geworden.

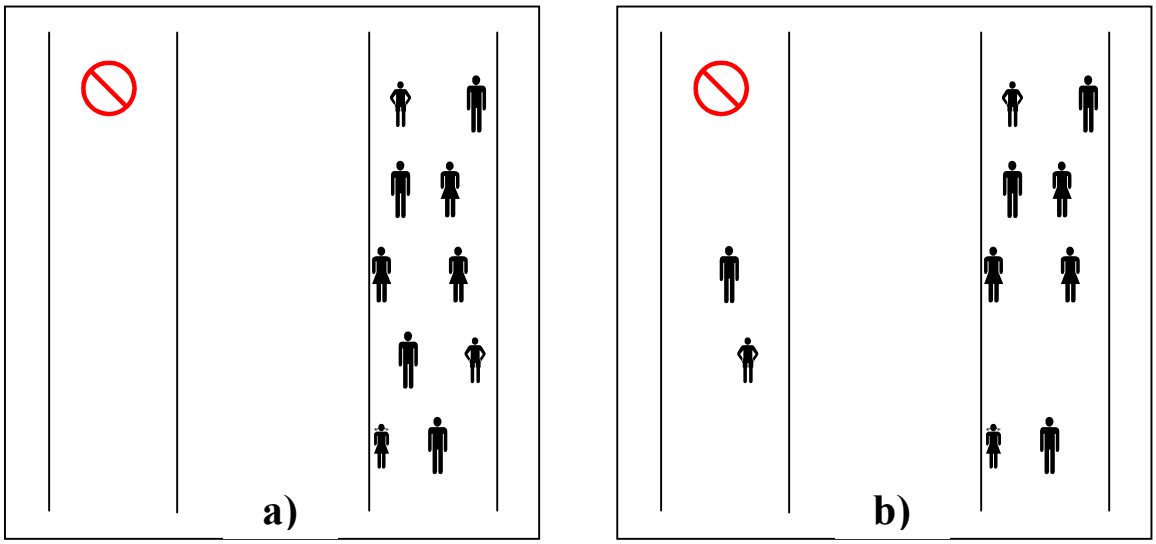


Abbildung 4: a) Alle 10 Personen gehen nur auf einem Bürgersteig. Die normalerweise unwahrscheinliche Situation wird durch das Aufstellen eines Verkehrsschild maximal wahrscheinlich. b) Trotz Verkehrsschild wird auf beiden Seiten gegangen. Abweichungen von der Vorschrift (Gesetz) scheinen toleriert zu werden. Die Wahrscheinlichkeit für diesen Fall muss durch einen Term für die Vorschrift und die Abweichung davon ergänzt werden.

Abbildung 4 a) zeigt die jetzige Situation. Um diese Wahrscheinlichkeit zu berechnen, genügt nicht allein die Gleichung für die Binomialverteilung; die "reale Wahrscheinlichkeit" muss durch einen zusätzlichen Term für die *Nebenbedingung* "Verkehrsschild" ergänzt werden.

Nun kann man sich zusätzlich fragen, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass sich trotz Verkehrsschild Personen auf beiden Seiten befinden (Abbildung 4 b)). Eigentlich sollte man davon ausgehen, dass diese Situation ohne Verkehrsschild wahrscheinlicher ist als mit Verkehrsschild. Berücksichtigt werden muss jedoch, inwiefern die Vorschrift (das Gesetz) in Abbildung 4 b) eingehalten wird bzw. inwiefern Abweichungen vom Gesetz toleriert werden. Weitere Erläuterungen hierzu finden sich in Kapitel 2.2.3.

Der zusätzliche Term, der die Nebenbedingung beschreibt, bezieht also die Vorschrift sowie die Abweichung von ihr ein.

Existiert also eine Einschränkung, so kann nicht mehr nur Statistik ohne Nebenbedingungen betrieben werden, sondern man muss zur Statistik mit Nebenbedingungen übergehen. Dies führt auf die Lagrange-Statistik.

2.2 Statistik mit Nebenbedingungen: Lagrange-Statistik

2.2.1 Die Lagrange-Funktion

Betreibt man Statistik ohne Nebenbedingungen, so wird die Wahrscheinlichkeit W für ein System mit N Elementen maximal: W(N) → Max! Dies gilt ebenfalls für den Logarithmus der Wahrscheinlichkeit ln(W(N)), der bis auf einen Faktor k_B auch Entropie genannt wird.

Das Prinzip von Lagrange[4] beschreibt dagegen die Statistik mit Nebenbedingungen. Die von Lagrange aufgestellte Formel heißt *Lagrange-Funktion* und strebt immer auf ein Maximum hin:

$$\tilde{L} = ln(W(N)) + \lambda \cdot E \quad \rightarrow \quad Max! \tag{3}$$

E ist die Nebenbedingung des statistischen Systems, welches aus N Elementen besteht. Diese Nebenbedingung kann von physikalischer Art, aber auch von sozialer, ökonomischer, politischer Art sein. Dies wird im Verlauf der Arbeit deutlicher werden. Ob zwischen ln(W) und λE ein Pluszeichen oder ein Minuszeichen steht, hängt vom Vorzeichen der Nebenbedingung E ab. Dass E sowohl positiv als auch negativ sein kann, soll weiter unten erläutert werden. λ bezeichnet man als Ordnungs- oder Lagrange-Parameter (vgl [12], S. 17).

ln(W(N)) ist dimensionslos und damit auch λ E und $\tilde{L}$.

2.2.2 Die modifizierte Lagrange-Funktion

Betrachtet wird zunächst noch einmal die Lagrange-Funktion. Wird λ durch T^{-1} ersetzt, so erhält man

$$\tilde{L} \;=\; \ln(W(N)) \;+\; \frac{1}{T} \cdot E$$

Mit $L = T \cdot \tilde{L}$ ergibt sich

$$L = T \cdot ln(W(N)) + E \quad \rightarrow \quad Max! \tag{4}$$

L ist die zu $\tilde{L}$ gleichwertige Lagrange-Funktion [13]. Ebenso wie $\tilde{L}$ so strebt auch die abgewandelte Lagrange-Funktion L auf ein Maximum zu.

---

[4] Joseph Louis de Lagrange, 1736 – 1813, italienisch-französischer Mathematiker, Physiker und Astronom (siehe [7])

2.2.3 Entropie und Ordnung, Unordnung, Chaos

Wie bereits angedeutet wurde, ist die Entropie S der Logarithmus der Wahrscheinlichkeit W für ein System mit N Elementen (, der mit einem Faktor k_B multipliziert wird). Ganz allgemein sieht die Gleichung für die Entropie wie folgt aus [12], S. 11:

$$\Delta S = k_B \cdot ln\left(\frac{W}{W_E}\right) \tag{5}$$

ΔS wird auch Mischentropie genannt. W_E ist eine Verteilung, die die Nebenbedingung E erzwingt. W_E berücksichtigt die Ordnung in einem System und ist konstant. Wendet man die Logarithmenregel auf den Bruch an, so ergibt sich

$$\Delta S = k_B \cdot \left(\ln(W) - \ln(W_E)\right)$$

Beim Differenzieren fällt der Term $\ln(W_E)$ weg, so dass nur noch die "bekannte" Form $S = k_B \cdot \ln(W)$ übrig bleibt.

Es müssen nun drei Fälle unterschieden werden:

1) Ist $W = W_E$, so gilt nach Gleichung (5): $\Delta S_{Ordnung} = k_B \cdot \ln(1) = k_B \cdot 0 = 0$. In diesem System herrscht also *Ordnung*, da $W = W_E$ ist. Oder anders ausgedrückt: Der Ausdruck $\Delta S = 0$ ist gleichbedeutend damit, dass die Unordnung in diesem System gleich Null ist.
2) Ist $W > W_E$, so ist auch $\Delta S = k_B \cdot ln\left(\frac{W}{W_E}\right) > 0$ und damit ist auch die *Unordnung* größer Null. Die Ordnung ist aber immer noch zu erkennen.
3) Ist $W >> W_E$, so ist auch $\Delta S >> 0$. Anstatt von sehr großer Unordnung zu reden, spricht man von *Chaos*. Die Ordnung ist dann nicht mehr zu erkennen.

Folglich ist der Term ln(W(N)) ein Maß für die Unordnung, während die Nebenbedingung E die Ordnung eines Systems wiedergibt [11] [13].

Demgemäß kann man die Lagrange-Funktion wie folgt schreiben:

$$L = T \cdot Unordnung + Ordnung \tag{6}$$

T ist hier der (Un-)Ordnungsparameter und lässt sich interpretieren als "soziale Temperatur" (siehe Kapitel 5.2.4 "Bedeutung von T in der Gesellschaft").

T bestimmt also die Abweichung von der Ordnung E. Es müssen nun wieder drei Fälle unterschieden werden, da T Null, gering und hoch sein kann:

1) Ist T = 0, so wird Unordnung nicht geduldet. Die *Ordnung* wird dann maximal:
$$L = 0 \cdot Unordnung + Ordnung = Ordnung \quad \rightarrow \quad Max!$$

2) Ist T > 0, so werden Abweichungen von der Ordnung geduldet; die Ordnung enthält Fehler. Da sich in diesem Fall die Ordnung noch erkennen lässt, spricht man von *Unordnung*.

3) Ist T sehr groß, so lässt sich die Ordnung nicht mehr erkennen und es entsteht *Chaos*:
$$L = \infty \cdot Unordnung + Ordnung = Chaos \quad \rightarrow \quad Max!$$

Damit wieder Ordnung herrscht, muss sie geschaffen werden. Dies lässt sich mittels Gesetze erreichen:

- Da Gesetze Ordnung schaffen, können nun unwahrscheinliche Zustände wahrscheinlich werden: Gesetze heben die Statistik auf.
- Gesetze gelten für alle und bewirken kollektives Verhalten.

Beispiel 1: Fußgänger auf verbotener Straßenseite

In Abbildung 4 a) und b) auf Seite 10 ist das Verkehrsschild das Gesetz, welches die Ordnung vorgibt. Diese sieht in diesem Fall so aus, dass alle Fußgänger auf der anderen Straßenseite gehen sollen. In a) herrscht somit Ordnung. In b) gehen trotz Schild einige Personen links. Da von der Ordnung abgewichen wird, herrscht Unordnung.

Ordnung, Unordnung und Chaos sollen an weiteren Beispielen verdeutlicht werden:

Beispiel 2: Gedicht von Goethe [14]:

a) Ordnung:

Ins Sichere willst du dich betten!
Ich liebe mir inneren Streit:
Denn, wenn wir die Zweifel nicht hätten,
wo wäre denn frohe Gewißheit?

b) Unordnung:

Ins sichere wil8st du dich betten;
Ich liebemir inneren Str eit:
Denn, wenn wir dies Zweifel nicht hätten.
wo wääre denn frohe Gewißhet?

c) Chaos:

Is siche rewil8st lu d ich b*t Ten;
Uc"h liebemir, iner en reit:
De.nn w §en nwiS dies weitel nic k t hä'mten.
#o wääre, das rohe Vewishet?

Wie man erkennt, liegt in a) Ordnung vor: Worte sind richtig geschrieben, grammatikalische Gesetze wurden eingehalten, Satzzeichen richtig gesetzt und Leerzeichen an den entsprechenden Stellen eingefügt. Das Gedicht kann mühelos gelesen und verstanden werden.

Wie man erkennt, liegt in b) Unordnung vor: Buchstaben fehlen oder sind falsch, Wörter wurden zusammengezogen, falsche Satzzeichen wurden gesetzt. Dies ist meistens eine Folge von hastigem Tippen. Die Ordnung in dem Gedicht ist allerdings noch zu erkennen. Bei manchen Worten oder Zeichen muss man zwar kurz über ihre Richtigkeit nachdenken, das allgemeine Verständnis des Gedichts jedoch bleibt erhalten.

Wie man erkennt, liegt in c) Chaos vor: Orthographie und Grammatik sind falsch, zu viele Leer- und Satzzeichen haben das Gedicht optisch verändert. Da der Sinn fehlt, kann das Gedicht nicht mehr verstanden werden – falls man hier überhaupt von einem Gedicht sprechen kann. Diese Situation ähnelt eher einem zufälligen Betätigen der Tasten auf der Tastatur.

Beispiel 3: Berechnung:

a) Ordnung

$$\begin{array}{rcrcr} 8 & * & 3 & = & 24 \\ & & & & + \\ 14 & * & 2 & = & 28 \\ & & & & + \\ 4 & * & 12 & = & 48 \\ \hline & & & & 100 \end{array}$$

Wie man erkennt, liegt in dieser Rechnung Ordnung vor: Die Gesetze der Multiplikation und der Addition sind eingehalten worden, wodurch sich die Rechnung leicht nachvollziehen lässt.

b) Unordnung

$$
\begin{array}{rcrcr}
8 & * & 3 & = & 24 \\
 & & & & + \\
14 & * & 2 & = & 20 \\
 & & & & + \\
4 & * & 12 & = & 44 \\
\hline
 & & & & 100
\end{array}
$$

Wie man erkennt, liegt in dieser Rechnung Unordnung vor: Beim Abtippen haben sich Fehler "eingeschlichen", was man beim Addieren der Produkte feststellt. In der zweiten und dritten Zeile wurden einige Produkte falsch berechnet; beim Addieren der richtigen Produkte ergibt sich 100. Die Ordnung ist in dieser Rechnung also noch zu erkennen.

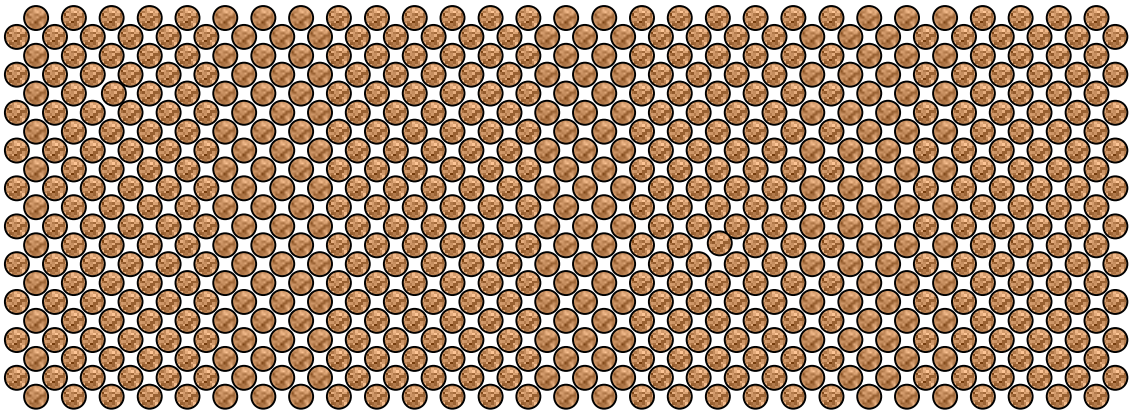
c) Chaos

$$
\begin{array}{rcrcr}
9 & * & 5 & = & 24 \\
 & & & & + \\
14 & * & 3 & = & 20 \\
 & & & & + \\
2 & * & 12 & = & 44 \\
\hline
 & & & & 100
\end{array}
$$

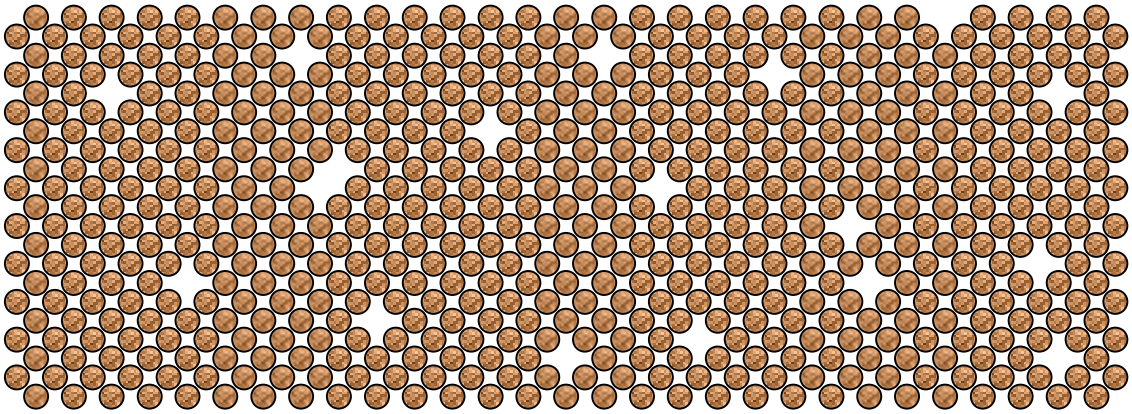
Wie man erkennt, liegt in dieser Rechnung Chaos vor: Eine Überprüfung der Rechnung ist nicht mehr möglich, da die Ordnung nicht mehr zu erkennen ist. Kennt man die wahre Rechnung nicht, so ist es nun nicht möglich herauszufinden, ob alle Zahlen falsch sind, oder ob doch einzelne Faktoren und Produkte richtig sind.

Beispiel 4: Anordnung von Atomen auf Gitterplätze:

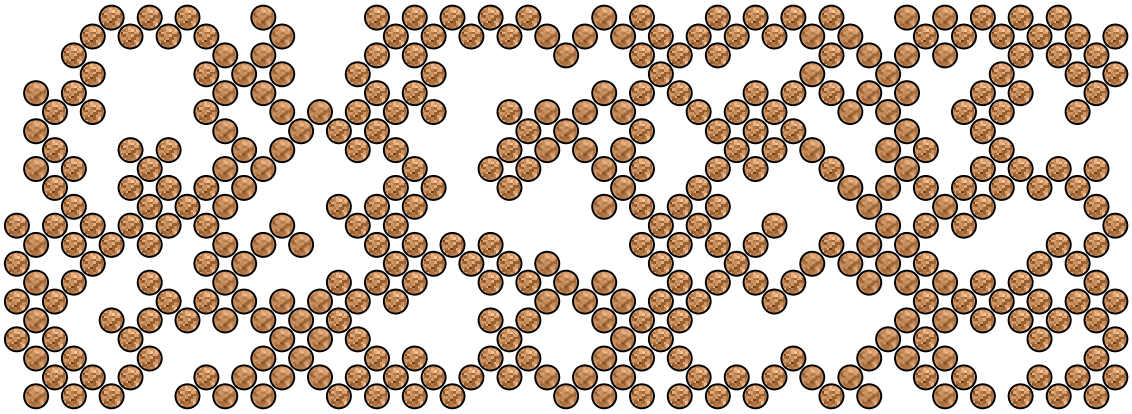
a) Ordnung



b) Unordnung



c) Chaos



Zu a)

Wie man erkennt, liegt in diesem Kristall Ordnung vor: es sind keine Leerstellen vorhanden, der Kristall ist perfekt. Dies ist bei tiefen Temperaturen der Fall.

Zu b)

Wie man erkennt, liegt in diesem Kristall Unordnung vor: es sind einige Leerstellen vorhanden, wobei die geordnete Struktur des Kristalls noch zu erkennen ist. Dies ist bei hoher Temperatur der Fall.

Zu c)

Wie man erkennt, liegt in diesem Kristall Chaos vor: es sind sehr viele Leerstellen vorhanden, was bei einer sehr hohen Temperatur der Fall ist. Der Kristall ist so "löchrig" geworden, dass er auseinander fällt. Die geordnete Struktur ist nicht mehr zu erkennen.

Beispiel 5: Menschen:

a)

Die Soldaten marschieren im Gleichschritt und tragen die gleiche Uniform. Das schafft Ordnung, wobei der Captain Abweichungen von der Ordnung nicht toleriert. Die Ordnung nimmt also den maximalen Wert an.

b)

Menschen in der Stadt: Die Wege der einzelnen Menschen sind völlig ungeordnet, jeder kann gehen, wohin und wie er will Auch die einheitliche Kleidung ist nicht mehr vorgeschrieben. Die auf Grund militärischer Gesetze festgelegte Ordnung ist hier aufgehoben.

Zu a) Ordnung [11]:

Zu b) Unordnung und Chaos [23]:

Geht man von Gleichung (3) auf Seite 11 aus, so lässt sich λ auch als Durchsetzungsvermögen für Ordnung interpretieren. Im Beispiel aus Kapitel 2.1.2 bedeutet das, dass das Verbotsschild Ordnung schafft. λ würde dann der Polizei gleichkommen, die bei Nichteinhaltung des Gesetzes Ordnung durchsetzt und je nach Verkehrsvergehen entsprechend hohe Strafen verteilt. Geht man von Gleichung (6) auf Seite 12 aus, so toleriert die Polizei keine Abweichung von der Ordnung. Das Beispiel aus Kapitel 2.1.2 zeigt nur 10 Personen. Geht man jedoch von sehr vielen Verkehrsteilnehmern aus, so ist auch die Wahrscheinlichkeit entsprechend größer, dass es immer wieder Personen gibt, die die Gesetze nicht beachten und von der Ordnung abweichen.

Die Wahrscheinlichkeit W ist für *jedes* System durch Gleichung (1) (Seite 7)gegeben. Die Nebenbedingung E dagegen ist für jedes System unterschiedlich. Sie muss bekannt sein, wenn man die Lagrange-Funktion für ein System berechnen möchte. Dies soll für ein binäres System in den Kapiteln 4.2.1 und 4.2.3 geschehen.

2.3 Die allgemeine Lagrange-Funktion

Die Gesamtbindungsenergie E setzt sich zusammen aus $E = E_0 + E_i \cdot N_i + \varepsilon_{ij} \cdot N_i \cdot N_j + ...$ Dies ist die Taylor-Entwicklung. Der dritte Summand berücksichtigt die Wechselwirkung mit den nächsten Nachbarn. Welcher Ausdruck sich hinter dem ε verbirgt, soll im nächsten Kapitel erläutert werden.

In Anhang A, Teil a) wird der allgemeine Ausdruck für die Entropie $\ln(W(N_i))$ hergeleitet (vgl. [19], S. 927). Dieser lautet

$$S \approx \ln(W(N_i)) = N \ln(N) - \sum_{i=1}^{K} N_i \ln(N_i) + \sum_{i=1}^{K} N_i \ln(p_i) .$$

Für den speziellen Fall des binären Systems wird im nächsten Kapitel die Entropie noch einmal explizit hergeleitet.

Wird obiges E und obiges S in $L = E + T \cdot S \rightarrow \text{Max!}$ eingesetzt, dann sieht die Lagrange-Funktion wie folgt aus:

$$L = E_0 + E_i N_i + \varepsilon_{ij} N_i N_j + T \cdot \left\{ N \cdot \ln(N) - \sum_{i=1}^{K} N_i \ln(N_i) + \sum_{i=1}^{K} N_i \ln(p_i) \right\} \rightarrow \text{Max!}$$

Geht man davon aus, dass die Atome nicht miteinander wechselwirken und dass sich die Lagrange-Funktion im Gleichgewicht befindet, so ergibt sich schließlich die Formel für die Boltzmann-Verteilung. Die Herleitung dieser Formel kann in Anhang A, Teil b) nachgelesen werden.

Weil die Lagrange-Statistik der gesamten Staatsexamensarbeit zugrunde liegt, macht man in den folgenden beiden Kapiteln 3 und 4 Thermodynamik.

3 Die Lagrange-Funktion als freie Energie

3.1 Das Lagrange-Prinzip in der Physik

Die Entropie ist innerhalb des Vielteilchensystems Thermodynamik eine wichtige Größe. Die mathematische Grundlage der Thermodynamik ist ebenfalls die Lagrange-Statistik; die Lagrange-Funktion wird dort "Freie Energie" genannt. Auf die thermodynamische Herleitung der Funktion soll an dieser Stelle verzichtet werden. Wird der Lagrange-Parameter λ in Gleichung (3) entsprechend gewählt, so liegt nach Umformung die Gleichung für die freie Energie vor. Die Nebenbedingung ist in diesem Fall die Energie E der Materie (Festkörper, Flüssigkeit, Gas). Sie ist die entscheidende Nebenbedingung dafür, wie sich Atome "zu verhalten haben".

Da Bindungsenergien in der Physik negativ sind, steht vor dem (Betrag von) E ein Minuszeichen.

Wie bereits erwähnt ist $\tilde{\mathrm{L}}$ dimensionslos. Der Lagrange-Parameter λ muss folglich die reziproke Dimension der Energie besitzen (vgl. [12], S. 17). Es ist $\lambda = 1/(k_B\mathrm{T})$.

$$\tilde{\mathrm{L}} \;=\; \ln(\mathrm{W(N)}) + \frac{1}{k_B \cdot \mathrm{T}} \cdot (-\mathrm{E}) \;\rightarrow\; \mathrm{Max!}$$

Multipliziert man zuletzt noch die Funktion mit "–1", so erhält man nach Umformung:

$$(-\tilde{\mathrm{L}}) \cdot k_B \cdot \mathrm{T} \;=\; -\mathrm{T} \cdot k_B \cdot \ln(\mathrm{W(N)}) - (-\mathrm{E}) \;\rightarrow\; \mathrm{Min!}$$

T ist der Lagrange-Parameter und steht in der Physik für die Temperatur. Kürzt man $(-\tilde{\mathrm{L}}) \cdot k_B \cdot \mathrm{T}$ mit F ab und berücksichtigt, dass ln(W(N)) mit der *Boltzmann-Konstanten*[5] k_B multipliziert die Entropie S ergibt, so erhält man schließlich den charakteristischen Ausdruck für die *freie Energie*, die sich im Gleichgewicht im *Minimum* befindet:

$$F = E - T \cdot S \;\rightarrow\; Min! \qquad (7)$$

Dies ist die Grundgleichung der Thermodynamik. Sie hat die Eigenschaften, dass sie immer gilt und dass sich aus ihr alle thermodynamischen Größen bestimmen lassen, wenn sie für ein Material bekannt ist.

In physikalischen Systemen wird mit $F \rightarrow Min!$, in gesellschaftlichen Systemen mit $L \rightarrow Max!$ hantiert. Aus Gründen der Einheitlichkeit wird im Kapitel "Kristallstrukturen" ebenfalls mit $L \rightarrow Max!$ gerechnet.

---

[5] Ludwig Boltzmann, 1844 – 1906, österreichischer Physiker und Mathematiker (siehe [4])

3.2 Die Gibbssche Phasenregel

Ein physikalisches System bezeichnet man als homogen, wenn die Komponente der Materie K = 1 ist. Hierbei handelt es sich um einzelne chemische Elemente (Gold, Platin usw.) oder um chemische Verbindungen (Wasser, Kochsalz usw.).

Ein physikalisches System bezeichnet man als heterogen, wenn die Komponente der Materie K > 1 ist. Hierbei handelt es sich zum Beispiel um Lösungen wie Kochsalz in Wasser (K = 2: binäres System), um Legierungen wie Gold-Platin-Legierung (ebenfalls K = 2) aber auch um Mineralien, die aus sehr vielen Komponenten bestehen.

Weiterhin kann Materie in fester, flüssiger oder gasförmiger Form vorliegen. Diese einzelnen Aggregatzustände bezeichnet man als *Phase*. Bei Existenz zweier Zustände spricht man von *Phasenübergang*. Dies gilt sowohl für Materie mit K = 1 als auch für Materie mit K > 1.

Welche Phase bzw. welcher Phasenübergang vorliegt, hängt von den Größen Temperatur T und Druck p ab; sie werden als Freiheitsgrade bezeichnet. Die Freiheitsgrade wiederum hängen von den Komponenten ab. So kann man bspw. im Winter nach der Salzstreuung das Aufschmelzen der vereisten Wege und Straßen beobachten. Das Vermischen von Wasser mit Kochsalz führt zu einer Erniedrigung der Schmelztemperatur.

Zwischen den drei Größen Komponente K, Phase P und Freiheitsgrad F gibt es einen Zusammenhang, der durch die *Gibbssche Phasenregel*[6] wiedergegeben wird [12] [17]:

$$P + F = K + 2 \tag{8}$$

Beispiel für Materie mit K = 1: Wasser:

- Für Eis gilt P = 1. Mit der Gibbsschen Phasenregel ergibt sich F = 2, d.h. die beiden Freiheitsgrade Druck und Temperatur sind frei wählbar. Wird eine der beiden Größen festgelegt, so ist die andere in gewissen Grenzen immer noch frei wählbar, ohne dass die feste Phase verlassen wird.
- Für Eis in Wasser gilt P = 2: hier befinden sich zwei Phasen wie Feststoff und Flüssigkeit im Gleichgewicht. Mit der Gibbsschen Phasenregel ergibt sich nun F = 1. Jetzt ist nur noch ein Freiheitsgrad frei wählbar, der andere ist dann sofort festgelegt.
- Im Tripelpunkt existieren alle drei Phasen gleichzeitig: P = 3. Die Gibbssche Phasenregel liefert F = 0. Kein Parameter ist mehr frei wählbar, Druck und Temperatur sind festgelegt. Für Wasser liegt der Tripelpunkt bei T = 0,0075 °C und p = 6,1 mbar (vgl. [19], S. 266).

---

[6] Josiah Willard Gibbs, 1839 – 1903, amerikanischer Mathematiker und Physiker (siehe [5])

Beispiel für Materie mit K = 2: Wasser und Kochsalz (vgl. [17], Kapitel D 9):

- Befindet sich die Lösung im festen Zustand (P = 1), dann ergibt sich aus der Phasenregel F = 3. Es sind also drei Parameter frei wählbar: der Druck p, die Temperatur T und die Salzkonzentration x. Bei Änderung dieser Größen in gewissen Grenzen wird die feste Phase nicht verlassen.
- Existieren für die Lösung zwei Phasen gleichzeitig (z.B. fest und flüssig, P = 2), so sind nur noch zwei Parameter frei wählbar (2 + F = 2 + 2). Bei diesen Parametern handelt es sich z.B. um den Druck und die Salzkonzentration, während T auf Grund der Schmelztemperatur des Salzes festgelegt ist.

  Handelt es sich dagegen bei den Phasen um flüssig und gasförmig (Dampf über der Flüssigkeit), so liegt der Dampfdruck fest, während Temperatur und Salzkonzentration frei wählbar sind.
- Erhöht man den Salzgehalt im Flüssigkeit-Dampf-Gemisch kontinuierlich, so kann ab einem bestimmten Zeitpunkt kein Salz mehr gelöst werden und fällt in fester Form auf den Boden des Gemisches. Für das Gemisch liegen nun drei Phasen vor: festes Salz, flüssige Salzlösung und Dampf. Es bleibt nur noch ein Freiheitsgrad übrig, der variiert werden kann. Die anderen beiden sind dann eindeutig bestimmt.
- Für ganz bestimmte Werte für p, T und x tritt der Fall ein, dass vier Phasen vorliegen: Eis und Salz im festen Zustand vermengt, flüssige Salzlösung und Dampf. Die Gibbssche Phasenregel für dieses vierphasige Zweistoffgemisch lautet dann 4 + F = 2 + 2, also F = 0.

4 Anwendung der Lagrange-Funktion auf physikalische Prozesse

4.1 Das homogene System

4.1.1 Die drei Aggregatzustände

Das physikalische, homogene System [3] ist dadurch gekennzeichnet, dass die Komponente der Materie K = 1 ist. Materie hat für jeden Aggregatzustand andere Eigenschaften

Materie ist

fest,	*flüssig,*	*gasförmig,*
wenn	wenn	wenn
die Temperatur niedrig *der äußere Druck sehr hoch* *die Mobilität der Atome gering*	*die Temperatur hoch* *der äußere Druck hoch* *die Mobilität der Atome groß*	*die Temperatur sehr hoch* *der äußere Druck gering* *die Mobilität der Atome sehr groß*

ist.

Abbildung 5 zeigt die drei Phasen für Wasser. Im flüssigen Zustand sind die Moleküle nur leicht aneinander gebunden. Kühlt man Wasser bis auf 0 °C oder mehr ab, so ändert sich die Phase des Wassers: es wird zu Eis. Die Moleküle haben nun einen festen Platz im Kristallgitter – die Bindungen untereinander sind sehr groß. Erreicht die Temperatur 100 °C, so siedet Wasser: es wird gasförmig. Die Moleküle sind nicht mehr gebunden und können sich frei im Raum bewegen.

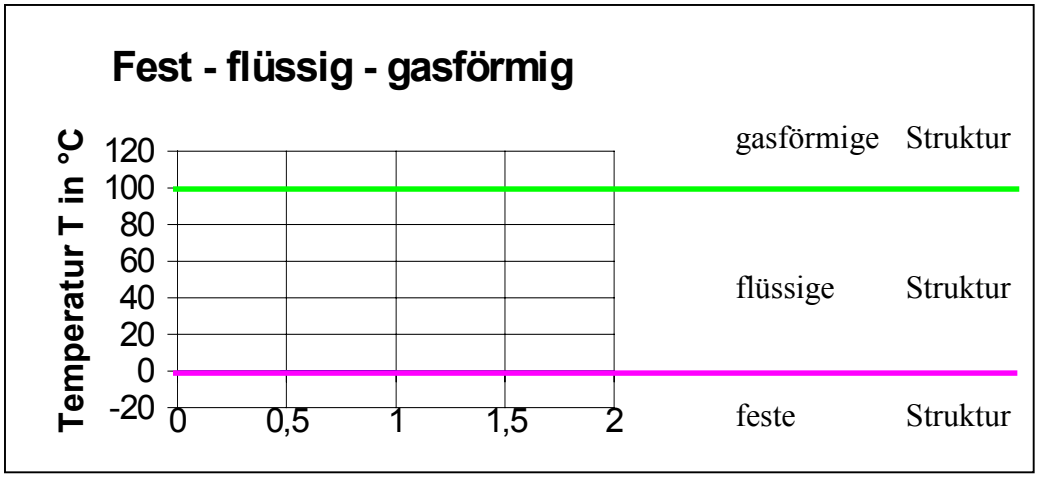


Abbildung 5: Für Wasser ist hier die Temperatur T im Zusammenhang mit den drei Phasen fest, flüssig und gasförmig dargestellt. Wasser ist bei hoher Temperatur flüssig, über 100 °C gasförmig und unter 0 °C fest. Die untere Linie charakterisiert den Phasenübergang von fest nach flüssig, die obere Linie den Phasenübergang von flüssig nach gasförmig.

4.1.2 Phasenübergang 1. Ordnung (fest – flüssig)

Was passiert beim Übergang von der einen Phase in die andere, bspw. von fest nach flüssig?

In der folgenden Tabelle sind die drei Zustände Eis, Wasser und Wasserdampf, die jeweilige Art der Bindung und die jeweilige Beschaffenheit der Struktur zusammengestellt.

In

Eis	*Wasser*	*Wasserdampf*
sind die Bindungen	sind die Bindungen	sind die Bindungen
starr.	*flexibel.*	*aufgehoben.*
Es herrscht	Es herrscht	Es herrscht
Ordnung.	*Unordnung.*	*Chaos.*

Der Graph für die Funktionsvorschrift $L = \ln(W) \cdot T + E$ ist eine Gerade. Trägt man die Lagrange-Funktion L über dem Lagrange-Parameter T auf, so entsteht das charakteristische Diagramm für einen Phasenübergang 1. Ordnung (Phasen sind hier "Ordnung" und "Unordnung") (Abbildung 6)

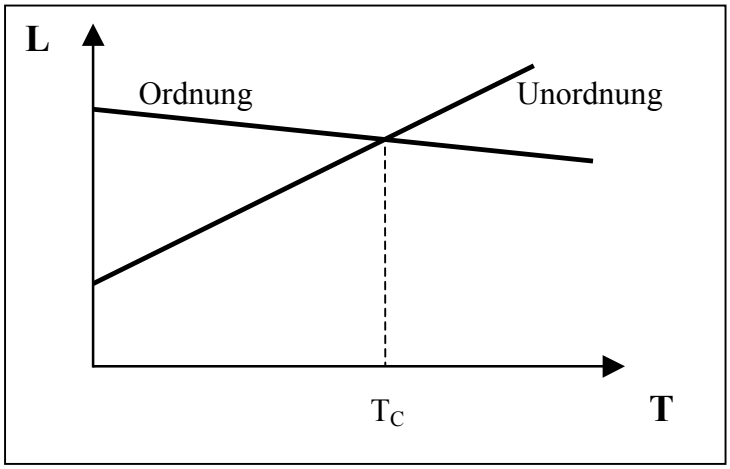


Abbildung 6: Diagramm für Phasenübergang Ordnung – Unordnung. Die Lagrange-Funktion L (= $\ln(W) \cdot T + E$) ist über dem Parameter T aufgetragen. An der Stelle $T = T_C$ ändert sich L unstetig [12].

In der Physik wird nicht L sondern die freie Energie F gegenüber T aufgetragen. Während L zum Maximum hin strebt, strebt F zum Minimum hin (vgl. Kapitel 3.1). Entsprechend anders liegen auch die beiden sich schneidenden Geraden.

Die Gerade mit einem großen Wert für E und einem kleinen Wert für die Steigung ln(W) wurde mit "Ordnung" bezeichnet; die Gerade mit kleinem E und großem ln(W) wurde mit "Unordnung" bezeichnet. An der Stelle $T = T_C$ gibt es einen unstetigen Phasensprung; dieser Übergang erfolgt also "schlagartig". Da die Lagrange-Funktion L maximal werden soll, läuft ein Punkt für wachsende Werte von T auf der "Ordnung-Geraden" entlang, und zwar bis zum Punkt T_C. Rechts von T_C bewegt sich der Punkt für ansteigende T-Werte auf der "Unordnung-Geraden" weiter, da jetzt für diese Werte L maximal ist. Für wachsende T-Werte geht also ein System von der geordneten in die unordentliche Phase (bei sehr hohen T-Werten schließlich in die chaotische Phase) über, was mit einem Wandel der Struktur einher geht.

Bildet man für den Phasenübergang 1. Ordnung die erste Ableitung, so ist diese an der Stelle $T = T_C$ unstetig: es ergibt sich ein "Sprung". Die Ableitungen sind für $T < T_C$ und $T > T_C$ verschieden:

$$\left(\frac{\partial L}{\partial T}\right)_{Ordnung} \neq \left(\frac{\partial L}{\partial T}\right)_{Unordnung} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{\partial L}{\partial T}\right)_{Ordnung} - \left(\frac{\partial L}{\partial T}\right)_{Unordnung} \neq 0$$

Differenziert man die Lagrange-Funktion nach T, so erhält man die Entropie S:

$$S_{Ordnung} - S_{Unordnung} \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta S \neq 0$$

Wendet man den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik [12] an, so ergibt sich

$$\Delta S = \frac{1}{T_C} \cdot \Delta Q \quad \Leftrightarrow \quad \Delta Q = T_C \cdot \Delta S$$

Das Resultat ist, dass ein Phasenübergang 1. Ordnung nur stattfinden kann, wenn Energie in das System hineingesteckt wird. Die Energie, die beim Phasenübergang von fest nach flüssig zugeführt werden muss, bezeichnet man als *Schmelzwärme*. Während des Übergangs bleibt die Temperatur konstant ($T = T_C$).

Abbildung 7 a) zeigt Wasser im gefrorenen Zustand. Die Temperatur beträgt ungefähr 0 °C. Durch Zufuhr von Wärme wird nun die Phasenumwandlung in Gang gesetzt. Dabei wird die Wärme bspw. der umgebenden Luft (Raumtemperatur $T \approx 20$ °C) entnommen. Die feste Struktur wird "aufgebrochen": das Eis schmilzt. Eis und Wasser liegen gleichzeitig vor (Abbildung 7 b). Schließlich ist nur noch Wasser vorhanden (Abbildung 7 c)). Bis zu diesem Zeitpunkt hat sich die Temperatur im Eis-Wasser-Gemisch nicht erhöht, sondern ist konstant geblieben. Ist nur noch die flüssige Phase vorhanden und wird weiterhin Wärme zugeführt, so hat dies einen Temperaturanstieg zufolge.

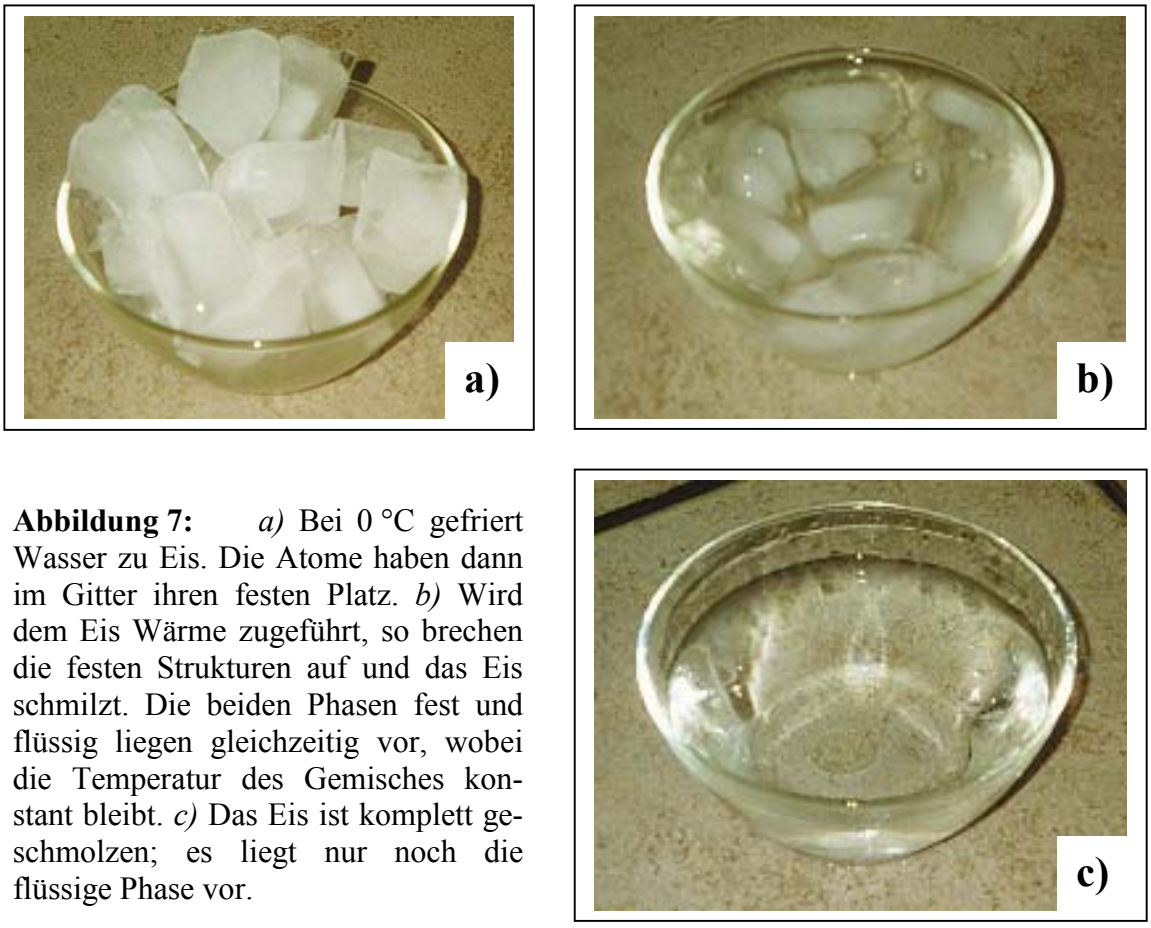


Abbildung 7: *a)* Bei 0 °C gefriert Wasser zu Eis. Die Atome haben dann im Gitter ihren festen Platz. *b)* Wird dem Eis Wärme zugeführt, so brechen die festen Strukturen auf und das Eis schmilzt. Die beiden Phasen fest und flüssig liegen gleichzeitig vor, wobei die Temperatur des Gemisches konstant bleibt. *c)* Das Eis ist komplett geschmolzen; es liegt nur noch die flüssige Phase vor.

4.2 Das heterogene (binäre) System

Besteht ein System aus K unterschiedlichen Atomsorten (mit $K \neq 1$), so bezeichnet man das System als *heterogen*. Im Fall $K = 2$ nennt man das System *binär*. Das nun folgende Modell wird auf ein binäres System angewendet; es kann natürlich auch für ein heterogenes System genutzt werden.

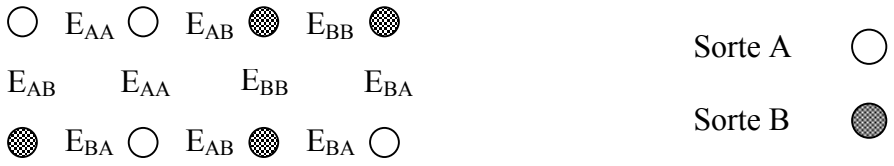
4.2.1 Das Modell der binären regulären Mischung

Dieses Modell wird in der physikalischen Chemie benutzt und geht auf *Bragg* und *Williams* zurück. Es berücksichtigt die Wechselwirkung der Atome mit nächsten Nachbar-Atomen (vgl. [1], Kapitel 1.9 u. 16.10; [12])

Im Gegensatz zum Modell des freien Gases, welches wechselwirkungsfreie Zustände beschreibt, lässt sich das Modell der regulären Mischung für gebundene Zustände gebrauchen.

Betrachtet werden zwei Gruppen A und B. In der Physik kann es sich hierbei um Natrium und Chlor, um Gold und Silber oder um Eisen und Blei handeln. Man spricht auch von der regulären A-B-Mischung.

Atome haben im Festkörper ihren festen Platz und stehen mit ihren nächsten Nachbarn in Verbindung.



Die Atome beider Substanzen können nun wie folgt miteinander in Wechselwirkung treten:

E_{AA}: Die Bindung des Atoms aus Sorte A an das Atom aus der eigenen Sorte.

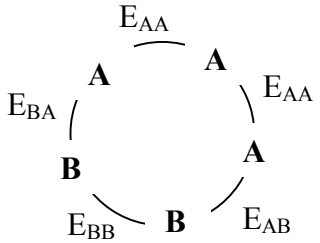
E_{AB}: Die Bindung des Atoms aus Sorte A an das Atom aus Sorte B.

E_{BA}: Die Bindung des Atoms aus Sorte B an das Atom aus Sorte A.

E_{BB}: Die Bindung des Atoms aus Sorte B an das Atom aus der eigenen Sorte.

Für Atome gilt $E_{AB} = E_{BA}$.

Für die folgende Rechnung soll von einer kreisförmigen Anordnung der Atome der beiden Substanzen A und B ausgegangen werden. Bestehen beide Substanzen aus insgesamt N Atomen, so ist auch die Anzahl aller nachbarlicher Bindungen bei kreisförmiger Formation gleich N.



N habe einen großen Zahlenwert. Besteht die Substanz A aus N_A Atomen und die Substanz B aus N_B Atomen, so ist $x = \frac{N_B}{N}$ der Anteil der Sorte B und $1 - x = \frac{N_A}{N} = 1 - \frac{N_B}{N}$ der Anteil der Sorte A. x bzw. $1 - x$ kann aber auch als Wahrscheinlichkeit interpretiert werden, als Nachbarn ein Atom der Sorte B bzw. aus Sorte A vorzufinden. Damit lässt sich die mittlere Häufigkeit h für die vier unterschiedlichen nachbarlichen Bindungen angeben: Sie ergibt sich aus der Multiplikation der Anzahl der Atome der entsprechenden Sorte mit der Wahrscheinlichkeit, auf dem Nachbarplatz ein Atom aus der entsprechenden Sorte vorzufinden:

$$h_{AA} = N_A \cdot (1 - x)$$
$$h_{AB} = N_A \cdot x$$
$$h_{BA} = N_B \cdot (1 - x)$$
$$h_{BB} = N_B \cdot x$$

Durch Aufsummieren der einzelnen Bindungsstärken $h_{ij} \cdot E_{ij}$ $(i, j = \{A, B\})$ ergibt sich für die *Gesamtbindungsstärke* des Systems

$$E = N_A (1 - x) E_{AA} + N_A x E_{AB} + N_B (1 - x) E_{BA} + N_B x E_{BB}$$

Um N_A und N_B durch x substituieren zu können, muss mit N erweitert werden:

$$E = N \cdot \frac{N_A}{N} (1 - x) E_{AA} + N \cdot \frac{N_A}{N} x E_{AB} + N \cdot \frac{N_B}{N} (1 - x) E_{BA} + N \cdot \frac{N_B}{N} x E_{BB}$$

$$\frac{E}{N} = (1 - x)(1 - x) E_{AA} + (1 - x) x E_{AB} + x (1 - x) E_{BA} + x x E_{BB}$$

$$= (1 - x)^2 E_{AA} + x (1 - x) (E_{AB} + E_{BA}) + x^2 E_{BB}$$

$$= E_{AA} - 2 x E_{AA} + x^2 E_{AA} + x (1 - x) (E_{AB} + E_{BA}) + x^2 E_{BB}$$

$$= E_{AA} - x E_{AA} - x E_{AA} + x^2 E_{AA} + x (1 - x) (E_{AB} + E_{BA}) + x^2 E_{BB}$$

Um die rechte Seite der Gleichung auf eine möglichst einfache Form zu bringen, bedient man sich eines Tricks: man fügt $x E_{BB} - x E_{BB}$ ein und fasst "geschickt" zusammen[7]:

$$\frac{E}{N} = E_{AA} + x E_{BB} - x E_{AA} - x E_{AA} + x^2 E_{AA} - x E_{BB} + x^2 E_{BB} + x (1 - x) (E_{AB} + E_{BA})$$

$$= E_{AA} + (E_{BB} - E_{AA}) x - E_{AA} x (1 - x) - E_{BB} x (1 - x) + (E_{AB} + E_{BA}) x (1 - x)$$

$$= E_{AA} + (E_{BB} - E_{AA}) x - (E_{AA} + E_{BB}) x (1 - x) + (E_{AB} + E_{BA}) x (1 - x)$$

[7] Damit die Idee dieses Tricks zustande kam, musste das Ergebnis schon bekannt sein, um in der Herleitung die richtige "Richtung" einzuschlagen.

Klammert man aus den beiden hinteren Summanden das Produkt x·(1 – x) aus, so ergibt sich nach Multiplikation der Gleichung mit N folgendes Ergebnis:

$$E = N \cdot \{E_{AA} + (E_{BB} - E_{AA}) \cdot x + [(E_{AB} + E_{BA}) - (E_{AA} + E_{BB})] \cdot x \cdot (1 - x)\} \quad (9)$$

An dieser Stelle soll folgende Substitution vorgenommen werden: $\varepsilon = (E_{AB} + E_{BA}) - (E_{AA} + E_{BB})$. Man erkennt, dass es sich bei Gleichung (9) um eine quadratische Funktion handelt. Je nach Vorzeichen von ε kann die zugehörige Parabel nach unten oder nach oben geöffnet sein.

4.2.2 Kristallstrukturen

Das Vorzeichen von $\varepsilon = (E_{AB} + E_{BA}) - (E_{AA} + E_{BB})$ hängt von den Vorzeichen von E_{ij} $(i, j = \{A, B\})$ab.

Jede der vier Bindungen kann positiv, Null oder negativ sein:

$E_{AA}, E_{AB}, E_{BA}, E_{BB} > 0$

$E_{AA}, E_{AB}, E_{BA}, E_{BB} = 0$

$E_{AA}, E_{AB}, E_{BA}, E_{BB} < 0$

Wie bereits erwähnt wurde, soll nicht mit $F \rightarrow \text{Min!}$, sondern mit $L \rightarrow \text{Max!}$ gerechnet werden.

Rechnet man mit $L \rightarrow \text{Max!}$, dann gilt für die Bindung der Atome an die andere Sorte $\varepsilon > 0$ (siehe Abbildung 9). Da Bindungsenergien in der Physik jedoch immer negativ sind, wäre der Betrag von E_{AB} und E_{BA} kleiner Null. Daher wäre $\varepsilon < 0$ und die Parabel nach oben geöffnet. Wegen $F \rightarrow \text{Min!}$ läge der Extremwert bei x = 0,5.

Rechnet man mit $L \rightarrow \text{Max!}$, dann gilt für die Bindung der Atome an die eigene Sorte $\varepsilon < 0$ (siehe Abbildung 13). Weil nun zwischen *gleichartigen* Atomen anziehende Kräfte bestünden wäre der Betrag von E_{AA} und E_{BB} negativ. ε würde positiv werden, die Parabel wäre nach unten geöffnet. Wegen $F \rightarrow \text{Min!}$ lägen die Extremwerte an den Randpunkten.

Für ε ergeben sich die drei Fälle "> 0", "< 0" und "= 0" (vgl. [12], Kapitel 8). Diese sollen auf den folgenden Seiten diskutiert werden.

ε > 0: Bindung an die fremde Gruppe

Ist ε > 0, so ist die Bindung der Atome an die Fremdatome stärker als an die Atome der eigenen Sorte. Auf den Nachbarplätzen befinden sich daher ausschließlich Atome der jeweils anderen Sorte (Abbildung 8).

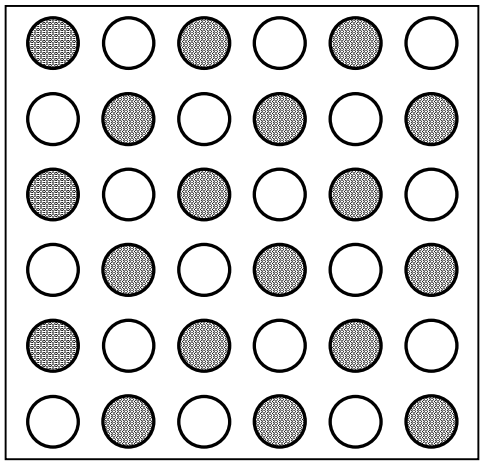


Abbildung 8: Durch bevorzugte Bindung an die *fremde* Gruppe entstandene Ordnung. Die Struktur ähnelt dem Schachbrett. Jedes Atom hat als Nachbarn ein Atom aus der jeweils anderen Sorte. Ein Beispiel ist die regelmäßige Anordnung von Natrium- und Chloratomen im Kristall.

Der zugehörige Funktionsgraph E(x) sieht dann wie folgt aus:

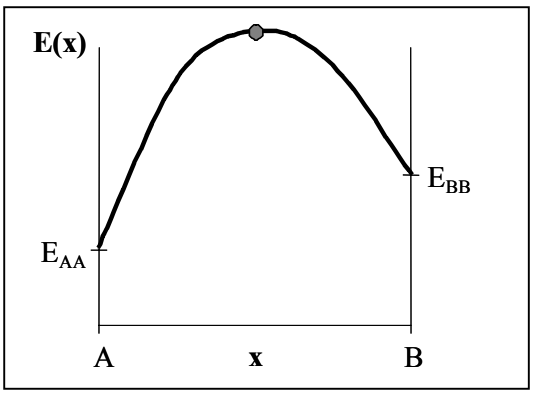


Abbildung 9: Der Funktionsgraph E(x) ist eine nach unten geöffnete Parabel, wenn ε > 0 ist. Sie hat an der Stelle x = 0,5 ihren maximalen Wert. Wären E_{AA} und E_{BB} gleich, so wäre die Parabel an den Randpunkten (x = 0 und x = 1) nicht verschoben sondern auf gleicher Höhe.

Das Maximum der Parabel liegt bei x = 0,5. Die Gesamtbindungsstärke ist also am größten, wenn von Sorte A genauso viele Atome vorhanden sind wie von Sorte B. In diesem Fall besitzt *jedes* Atom einen "Bindungspartner"; die Struktur ist gemischt geordnet. Die Bindung

zwischen Natrium- und Chloratomen bspw. kommt auf Grund starker elektrostatischer Kräfte zustande.

ε = 0: Bindungen existieren nicht

Ist ε = 0, so ist eine Bindung der Atome an eigene und fremde Atome entweder genau gleich oder nicht vorhanden. Der Fall, dass die vier Bindungen E_{AA}, E_{AB}, E_{BA} und E_{BB} genau gleich sind, ist ein Idealzustand und kommt in der Natur nicht vor. Die Besetzung der Nachbarplätze ist wahllos, keine Atomsorte wird bevorzugt (Abbildung 10).

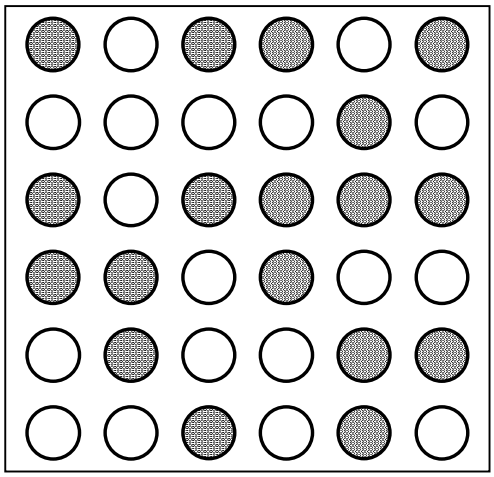


Abbildung 10: Eine chaotische Struktur entsteht, wenn die Bindung an eigene und fremde Atome entweder gleich Null oder genau gleich ist. Letzteres besagt, dass den Atomen beider Sorten die Besetzung des Nachbarplatzes gleichgültig ist. Ein Beispiel ist das Vermengen zweier Gase: sie sind ohne Bindung und mischen sich vollständig.

Der zugehörige Funktionsgraph E(x) sieht dann wie folgt aus:

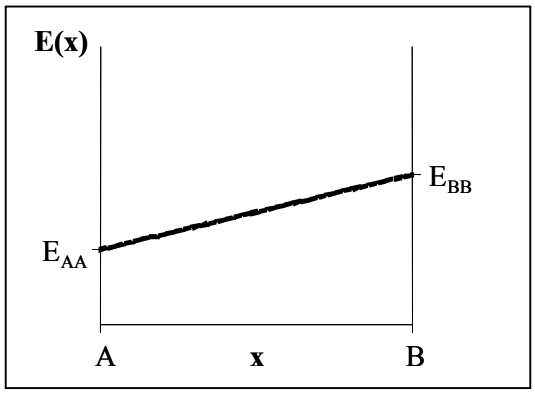


Abbildung 11: Der Funktionsgraph E(x) ist eine Gerade, wenn ε = 0 ist. Sie hat an jedem Punkt x keinen maximalen Wert. Wären E_{AA} und E_{BB} gleich, so würde man keine Gerade, sondern eine Parallele zur Abszisse erhalten.

Bei einer Geraden existiert kein Maximum; jeder Wert wird gleichermaßen angenommen. Die Gerade hat E_{AA} als y-Achsenabschnitt und $E_{BB} - E_{AA}$ als Steigung. In diesem Fall sind beide Substanzen ideal gemischt; die Struktur ist nicht geordnet, sondern chaotisch. Ein Beispiel dafür sind Gase.

$\varepsilon < 0$: Bindung an die eigene Gruppe

Ist $\varepsilon < 0$, so ist die Bindung der Atome an die eigenen Atome stärker als an die Atome der fremden Sorte. Auf den Nachbarplätzen befinden sich daher ausschließlich Atome der eigenen Sorte (Abbildung 12).

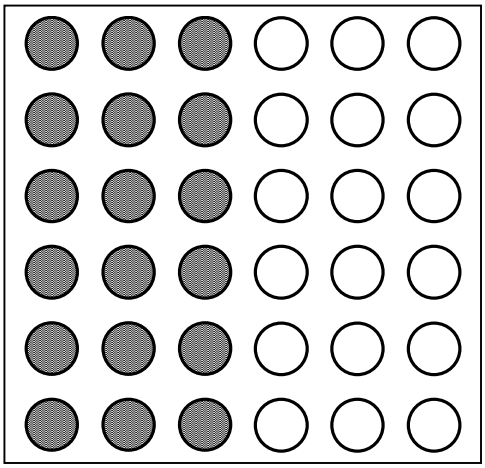


Abbildung 12: Durch bevorzugte Bindung an die *eigene* Gruppe entstandene Ordnung. Jedes Atom hat als Nachbarn ein Atom aus der eigenen Sorte. Beispiele sind Eisen und Blei oder auch Wasser und Öl: beide Stoffe trennen sich vollständig in zwei Bereiche. Nur an der Grenzfläche treffen beide Sorten aufeinander.

Der zugehörige Funktionsgraph E(x) sieht dann wie folgt aus:

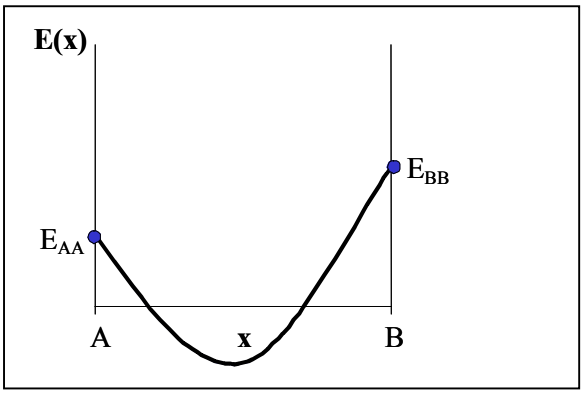


Abbildung 13: Der Funktionsgraph E(x) ist eine nach oben geöffnete Parabel, wenn $\varepsilon < 0$ ist. Sie hat an den Randpunkten $x = 0$ und $x = 1$ ihre maximalen Werte. Wären E_{AA} und E_{BB} gleich, so wäre die Parabel an den Randpunkten nicht verschoben sondern auf gleicher Höhe.

Es existieren zwei Maxima auf der Parabel: das eine liegt bei x = 0, das andere bei x = 1. Die Gesamtbindungsstärke ist also am größten, wenn jedes Atom als Nachbarn ein Atom der eigenen Sorte hat. Die Struktur ist getrennt geordnet. An den Grenzflächen können gegebenenfalls "Spannungen" auftreten: chemische Reaktionen zum Beispiel beginnen, an diesen Stellen abzulaufen.

Als Beispiel lassen sich Eisen und Blei anführen. Vermengt man die beiden Elemente im flüssigen Zustand, so trennen sich beide Stoffe. Das leichte Eisen schwimmt auf dem schweren Blei.

4.2.3 Die Lagrange-Funktion eines binären physikalischen Systems

Es soll nun die Entropie $S \approx \ln(W)$ für das binäres System berechnet werden.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit einer Verteilung von N_A Atomen der Sorte A und N_B Atomen der Sorte B auf N Plätze?

Die Belegung eines Platzes durch ein Atom der Sorte A ist genauso wahrscheinlich wie durch ein Atom der Sorte B: $p_A = 0{,}5 = p_B$. Man benötigt die Formel für die Binomialverteilung; wie bereits erwähnt wird für K = 2 aus der Multinomialverteilung die Binomialverteilung (vgl. Gleichung (1) auf Seite 7). Statt k = 1, 2 wird in diesem Fall k = A, B geschrieben.

Mit $N_A = N - N_B$ lässt sich die Wahrscheinlichkeit wie folgt berechnen:

$$W(N_B, N - N_B) = \frac{N!}{N_B! \cdot (N - N_B)!} \cdot \frac{1}{2^N} \tag{10}$$

Unter Berücksichtigung der Logarithmenregeln erhält man

$\ln(W(N_B, N - N_B)) = \ln(N!) - \ln(N_B!) - \ln((N-N_B)!) - N \ln(2)$

Verwende die Stirling-Formel[8]: $\ln(N!) = N \ln(N) - N + ...$

Dann ergibt sich

$$\begin{aligned}
\ln(W) &= N \ln(N) - N - (N_B \ln(N_B) - N_B) - [(N - N_B) \ln(N - N_B) - (N - N_B)] - N \ln(2) \\
&= N \ln(N) - N - N_B \ln(N_B) + N_B - (N - N_B) \ln(N - N_B) + N - N_B - N \ln(2) \\
&= N \ln(N) - N_B \ln(N_B) - (N - N_B) \ln(N - N_B) - N \ln(2)
\end{aligned}$$

Um den Anteil x in die Formel einzubringen, muss mit N erweitert werden:

[8] Es wird die vereinfachte Stirling-Formel verwendet, da in der folgenden Rechnung die übrigen Terme der vollständigen Stirling-Formel wegfallen würden.

$$\begin{aligned}
\ln(W) &= N\ln(N) - \left(N\cdot\frac{N_B}{N}\right)\ln\left(N\cdot\frac{N_B}{N}\right) - \left(N\cdot\frac{N-N_B}{N}\right)\ln\left(N\cdot\frac{N-N_B}{N}\right) - N\ln(2)\\
&= N\ln(N) - N\,x\,[\ln(N)+\ln(x)] - N(1-x)[\ln(N)+\ln(1-x)] - N\ln(2)\\
&= N\ln(N) - N\,x\ln(N) - N\,x\ln(x) - N(1-x)\ln(N) - N(1-x)\ln(1-x) - N\ln(2)\\
&= - N\,x\ln(x) - N(1-x)\ln(1-x) - N\ln(2)
\end{aligned}$$

Man erhält:

$$\ln(W) = -N\cdot\left[x\cdot\ln(x) + (1-x)\cdot\ln(1-x) + \ln(2)\right] \tag{11}$$

Setzt man nun den berechneten Wert für die Gesamtbindungsstärke E und für die Entropie ln(W) in die abgewandelte Langrange-Funktion (Gleichung (4) auf Seite 11) ein, so erhält man die folgende Gleichung:

$$L(x) = N\cdot\left\{E_{AA} + x\cdot(E_{BB}-E_{AA}) + \varepsilon\cdot x\cdot(1-x) - T\bullet\left[x\cdot ln(x) + (1-x)\cdot ln(1-x) + ln(2)\right]\right\} \rightarrow Max!$$

$$\text{mit}\quad \varepsilon = (E_{AB}+E_{BA}) - (E_{AA}+E_{BB}) \tag{12}$$

Bemerkungen:

- Der Wert von L wird somit durch die Werte von x, T und E_{ij} (i, j ∈ {A, B}) beeinflusst.
- Würde man nicht mit $S \approx \ln(W)$ sondern mit $S = k_B \cdot \ln(W)$ rechnen, dann stünde in der Gleichung die Boltzmann-Konstante k_B als Faktor vor der Temperatur T.
- Wie bereits erwähnt kann die Bindungsstärke ε positiv, Null oder negativ sein. Welches Vorzeichen ε hat, hängt von den Vorzeichen und Werten den Bindungen E_{AA}, E_{AB}, E_{BA}, E_{BB} ab.

4.2.4 Bedeutung von T in der Physik

Ist T = 0, so ist der Graph der Lagrange-Funktion eine nach oben oder nach unten geöffnete Parabel oder eine Gerade, je nach Wert von ε.

Ist T > 0, so ist der Graph keine Parabel mehr. Das Erhöhen der Temperatur führt dazu, dass sich beide Substanzen etwas vermischen können. Beide Stoffe enthalten nun auch Atome des jeweils fremden Stoffes, wobei die Bindung an die eigenen Atome stärker ist als an die

fremden Atome. Abbildung 14 zeigt, dass die zuvor getrennt geordnete Struktur durch die erhöhte Temperatur unordentlich geworden ist (vgl. [12], Kapitel 8).

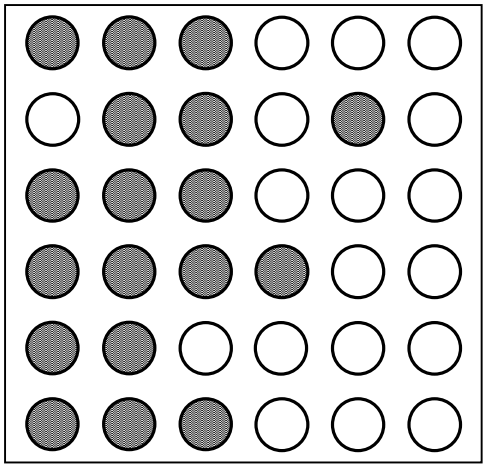


Abbildung 14: Unordnung: Die geordnete, segregierte Struktur enthält "Störstellen". Das geordnete Muster ist trotz Defekte zwar noch zu erkennen, jedoch muss nun von Unordnung gesprochen werden.. Beide Substanzen enthalten jeweils Atome der anderen Substanz.

Der Lagrange-Funktion entspricht der Summe aus einer quadratischen und einer logarithmischen Funktion. Der zugehörige Graph sieht dann wie folgt aus:

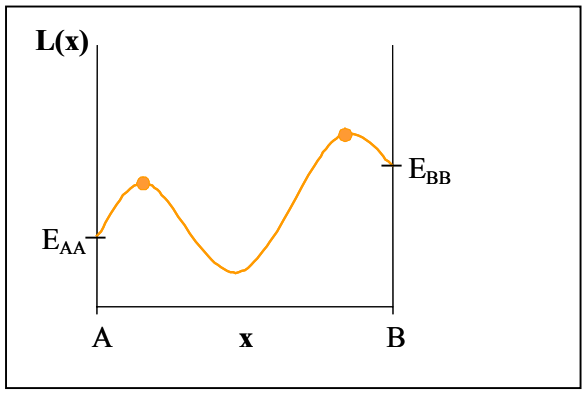


Abbildung 15: Die Lagrange-Funktion L(x) besitzt für $\varepsilon > 0$ und $T > 0$ zwei Maxima. x ist der Anteil der Gruppe B. Beide Substanzen enthalten jeweils Atome der anderen Substanz.

Wird die Temperatur weiter erhöht, so durchmischen sich beide Substanzen stärker. Je größer also T wird, desto mehr nähern sich die beiden Maxima des Graphen an. Irgendwann ist ein "kritischer" Wert T_C erreicht, wo nur noch ein Maximum vorhanden ist; es liegt bei $x = 0{,}5$. Zu diesem Zeitpunkt ist die Bindung an die fremden Atome genauso groß wie an die eigenen Atome: beide Sorten sind dann vollständig gemischt. Die Bindungsstärke würde also bei T_C "umschlagen": ε ist jetzt gleich Null, die Struktur ist nun chaotisch (Abbildung 16).

4.3 Das Phasendiagramm eines binären physikalischen Systems

Nachdem nun bezüglich $\varepsilon > 0$ gezeigt wurde, wie L von x für unterschiedliche T abhängt, soll nun die Frage beantwortet werden, wie die Werte *für T* von x abhängen. Trägt man in einem Diagramm die zu einem T gehörenden Maxima gegenüber x auf, so liegen die Punkte für das jeweilige T auf einer Parallelen zur Abszisse. Alle Punkte liegen dann auf einer Kurve, wie es Abbildung 16 zeigt (vgl. [12], Kapitel 8).

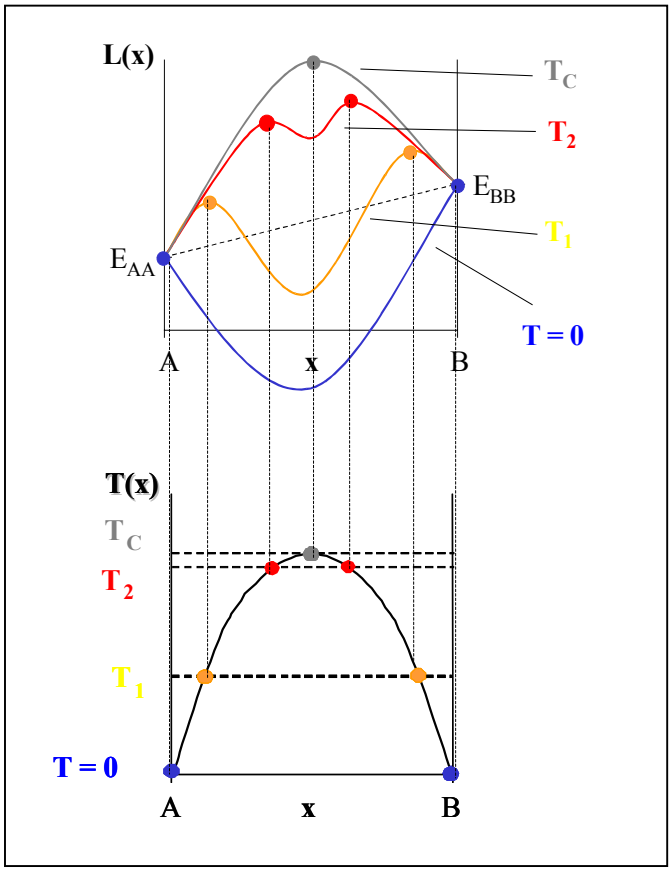


Abbildung 16: *Oben:* Für $\varepsilon < 0$ und $T = 0$ trennen sich beide Substanzen. Wird T gesteigert, so nähern sich beide Maxima an, wie es bei T_1 und T_2 der Fall ist. Wird T_C erreicht, so sind beide Substanzen vollständig vermischt. *Unten:* Die zu verschiedenen Werten von T zugehörigen Maxima sind hier über x aufgetragen.

Es stellen sich nun zwei Fragen:

1. Wie sieht die Formel aus, die diesen Kurvenverlauf wiedergibt?
2. Was ist mit den Punkten, die unterhalb dieser Kurve liegen?

Zuerst soll Frage 1 beantwortet werden. Zu diesem Zweck betrachtet man noch einmal einen Graphen L(x) für $T > 0$ (Abbildung 17).

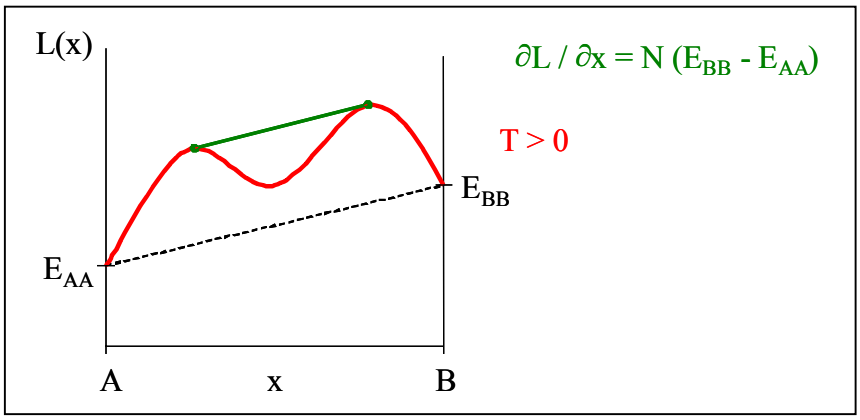


Abbildung 17: Lagrange-Funktion für T > 0 mit Tangente, die durch die maximalen Punkte verläuft. Die nebenstehende Formel gibt die Steigung der Tangente wieder.

Legt man eine Gerade durch die beiden Maxima, so ist sie für beide Punkte die Tangente. Diese Tangente ist parallel zu der Geraden, die durch die beiden Randpunkte E_{AA} und E_{BB} verläuft, weil der Graph der Lagrange-Funktion selber um die beiden Randpunkte verschoben ist. Da die Ableitung der Lagrange-Funktion in beiden maximalen Punkten der Steigung der Tangente in diesen Punkten entspricht, ergibt die Differentiation von L nach x:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = N \cdot \left(E_{BB} - E_{AA}\right) \tag{13}$$

Im zweiten Schritt wird die Lagrange-Funktion in Gleichung (12) auf Seite 34 abgeleitet. Daraus resultiert folgender Ausdruck:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = N \cdot \left\{\left(E_{BB} - E_{AA}\right) + \varepsilon \cdot \left(1 - 2 \cdot x\right) - T \bullet \left[\ln(x) + 1 - \ln(1-x) - 1\right]\right\} \tag{14}$$

Setzt man nun die beiden Ausdrücke aus Gleichung (13) und Gleichung (14) gleich, so folgt daraus:

$$N \cdot \left\{\left(E_{BB} - E_{AA}\right) + \varepsilon \cdot \left(1 - 2x\right) - T \bullet \left[\ln(x) + 1 - \ln\left(1 - x\right) - 1\right]\right\} = N \cdot \left(E_{BB} - E_{AA}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \varepsilon \cdot \left(1 - 2x\right) - T \bullet \left[\ln(x) - \ln(1-x)\right] = 0$$

Durch Umstellung der Gleichung nach T folgt:

$$\frac{T(x)}{\varepsilon} = \frac{1 - 2 \cdot x}{ln(x) - ln(1-x)} \tag{15}$$

Diese Gleichung stellt den Zusammenhang zwischen T und x dar und ist folglich die Funktionsvorschrift für das T – x – Diagramm. Dass sich diese Gleichung jedoch leicht in eine "handlichere" Gleichung transformieren lässt, soll in Kapitel 5.3 erläutert werden.

Die Punkte und die Kurve in Abbildung 16 wurden skizziert und sind nicht maßstabsgetreu. Der Graph zu Gleichung (15) sieht in der Realität so aus, wie es Abbildung 18 zeigt. Weiterhin sieht man zwei Phasen: Integration und Segregation. Im Gebiet "Integration" ist die Legierung ideal gemischt, im Gebiet "Segregation" mischen sich beide Stoffe nur noch zum Teil.

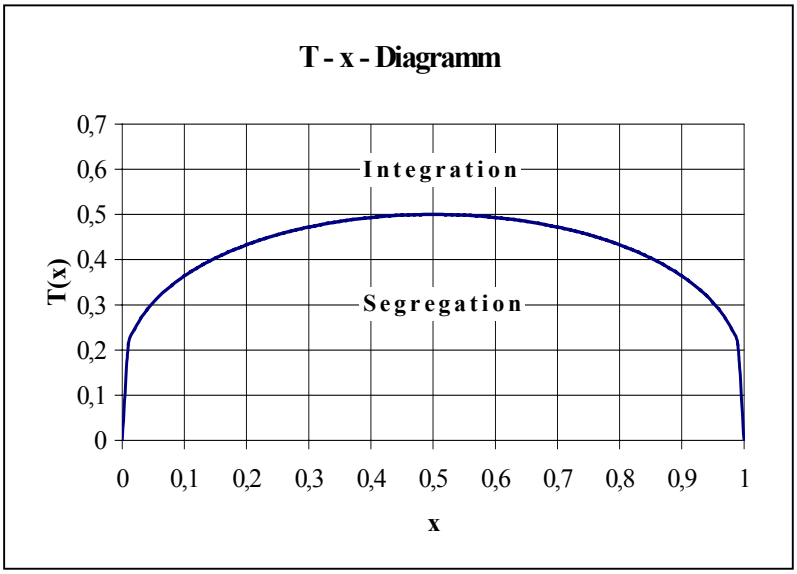


Abbildung 18: Graph zur Funktionsvorschrift T(x) / ε. Auffällig ist, dass der Graph für sehr kleine x-Werte sehr stark ansteigt. Oberhalb der Kurve sind beide Substanzen vollständig gemischt, unterhalb trennen sie sich [13].

Man erkennt, dass das Anwachsen sehr kleiner x-Werte (vom Rand bis ungefähr zum Punkt x = 0,02) ein sehr starkes Anwachsen der entsprechenden T-Werte bewirkt. Je weiter sich die x-Werte dann dem Punkt 0,5 nähern, desto geringer ist die entsprechende Änderung der y-Werte.

Um Frage 2 zu beantworten, muss noch einmal Abbildung 17 betrachtet werden. Bei x = 0,5 sollte man sich eigentlich im untersten Punkt der Kurve für T > 0 befinden. Das widerspricht jedoch der Bedingung $L = E + T \bullet S \rightarrow$ Max! Die Natur hilft sich da mit der Tangente. Ein Punkt auf der Tangente existiert somit nicht und zerfällt in seine beiden Randpunkte. Dass heißt alle Punkte zwischen den beiden Maxima – und damit unterhalb der Kurve – existieren gar nicht; das System trennt sich.

Wie sieht für das T-x-Diagramm der Phasenübergang aus? Der Übergang Integration – Segregation erfolgt nicht schlagartig wie beim Phasenübergang 1. Ordnung, sondern

kontinuierlich. Man spricht von einem *Phasenübergang 2. Ordnung* (vgl. [12], Kapitel 5.7 und [19], S. 833).

Ein Phasenübergang 2. Ordnung ist generell dadurch gekennzeichnet, dass der Graph der 1. Ableitung stetig aber an einer Stelle nicht differenzierbar ist. Der Graph hat an dieser Stelle einen "Knick". Abbildung 19 zeigt diesen Phasenübergang. Es handelt sich hierbei um den Graphen aus Abbildung 18, der aber um 90° nach rechts gedreht wurde. Während der Graph in Abbildung 18 eindeutig ist, so ist der Graph in Abbildung 19 mehrdeutig.

Damit es sich hierbei um einen Phasenübergang 2. Ordnung handelt, muss die Größe der Ordinate – in diesem Fall die Konzentration x – die Ableitung einer Funktion sein. Dies ist in der Tat der Fall[9].

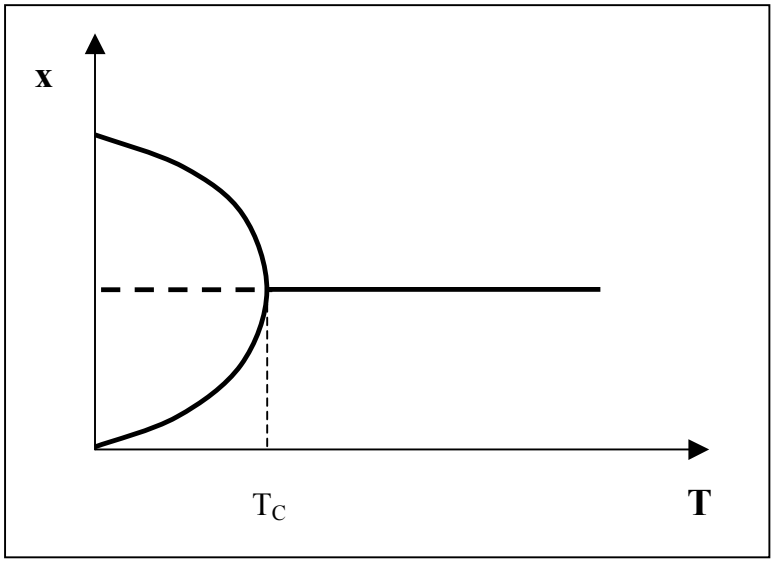


Abbildung 19: Phasenübergang 2. Ordnung: Auf der Ordinate ist die Konzentration x, auf der Abszisse die Temperatur T dargestellt. x ist die Ableitung einer Funktion, wie in Anhang B gezeigt wird. Der Graph hat bei $T = T_C$ einen Knick. Für $T < T_C$ segregiert die Legierung, für $T > T_C$ ist die Legierung ideal gemischt.

4.4 Beispiele für physikalische Phasendiagramme

4.4.1 Gold – Platin

Als Beispiel soll das Phasendiagramm einer Legierung, die aus Gold und Platin besteht, erläutert werden (Abbildung 20).

---

[9] Die Begründung hierfür findet sich in Anhang B

Die dargestellte Kurve T(x) gibt an, für welche Temperatur ein zugehöriger Platinanteil in der Legierung vollständig gelöst werden kann. Besteht die Legierung zu 60 % aus Platin (und dementsprechend zu 40 % aus Gold), so wird sich das Platin mit dem Gold erst bei einer Temperatur von 1230 °C komplett mischen. In Abbildung 20 ist nun der Fall dargestellt, dass die Temperatur für diesen Platinanteil jedoch nur 1000 °C beträgt (Quadrat). Der Platinanteil kann nun nicht völlig gelöst werden; die Legierung zerfällt in "goldreiche" Gebiete, die einen Platinanteil von ca. 35 % (linker Kreis) besitzen und in "goldarme" Gebiete, die einen Platinanteil von ca. 85 % (rechter Kreis) besitzen. Diese Werte sind die Schnittpunkte der Kurve mit der Geraden, die man durch den Punkt (Quadrat) parallel zur Abszisse legen muss.

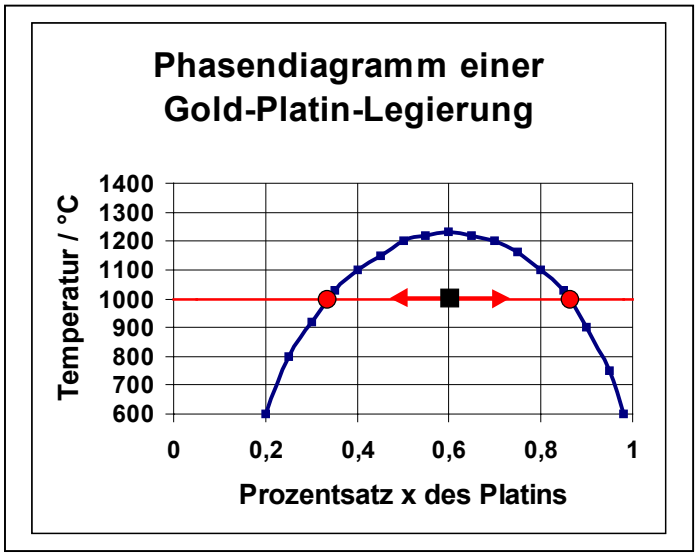


Abbildung 20: In dem Phasendiagramm einer Gold-Platin-Legierung[10] ist auf der Abszisse der Anteil des Platins und auf der Ordinate die Temperatur T in Grad Celsius dargestellt. Punkte *auf* der Kurve geben an, dass der zugehörige Platinanteil bei zugehöriger Temperatur restlos in der Mischung gelöst ist. Punkte *unterhalb* der Kurve geben an, dass bei zugehöriger Temperatur die Legierung in platinarme (Kreis links) und platinreiche (Kreis rechts) Gebiete zerfällt.

Anhand der Gold-Platin-Legierung soll noch einmal der Phasenübergang 2. Ordnung beschrieben werden:

Betrachte eine Legierung, die zu 60 % aus Platin besteht und 1400 °C heiß ist. Der zugehörige Punkt im Koordinatensystem liegt im Bereich "Integration", d.h. die beiden Stoffe sind zu diesem Zeitpunkt vollständig vermischt. Wird die Mischung nun bis 1230 °C abgekühlt, so bleibt der Platinanteil in der Legierung weiterhin komplett gelöst. (Auch das Erhöhen der Temperatur würde nichts bewirken: vollkommen gelöst bleibt vollkommen gelöst.) Wird die Temperatur von 1230 °C an weiter erniedrigt, dann trennen sich beide Stoffe immer stärker:

[10] Die Datenpunkte für die Kurve wurden aus [6] entnommen

der Platinanteil in den goldreichen Gebieten und der Goldanteil in den platinreichen Gebieten nimmt stetig ab. Am Ende bleiben beide Stoffe in reiner Form übrig. Der Übergang von "Integration" nach "Segregation" erfolgte also nicht "sprunghaft" wie beim Phasenübergang 1. Ordnung (siehe Kapitel 4.1.2), sondern stetig.

4.4.2 Leerstellen – Atome im Gitter

Als weiteres Beispiel soll das Phasendiagramm einer Mischung betrachtet werden, die aus Leerstellen und Atomen im Gitter besteht. Dabei kann es sich entweder um homogene Materie wie Kupfer oder um heterogene (binäre) Materie wie bspw. Natriumchlorid handeln. Für $T = 0$ liegen keine oder nur eine minimale Anzahl an Leerstellen im Kristall vor. Wird nun die Temperatur erhöht, so vergrößert sich die Zahl der "Leerstellen" im Kristall. Hierbei werden Atome von ihren Gitterplätzen im Kristall entfernt. Im thermischen Gleichgewicht – also für eine konstante Temperatur – liegt auch eine ganz bestimmte Anzahl von Leerstellen vor. Für jede Temperatur $T > 0$ K steht demgemäß die Zahl der Leerstellen N_V fest.

Homogen: In homogener Materie wie Kupfer sind auch alle Leerstellen gleich beschaffen (Abbildung 21).

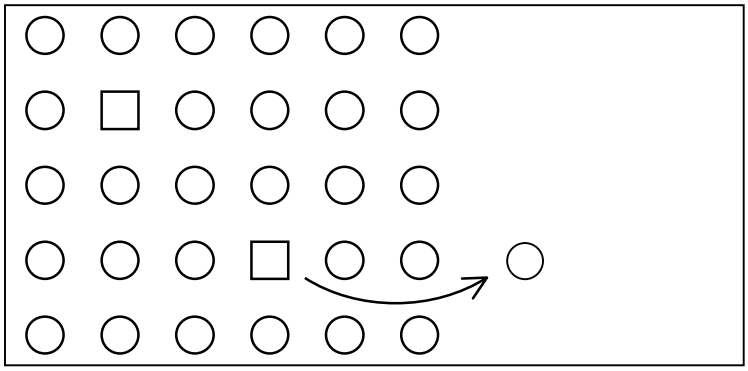


Abbildung 21: Leerstellen in *homogener* Materie (bspw. Kupfer): Leerstellen (Quadrate) entstehen, wenn Atome (Kreise) von ihren Gitterplätzen entfernt werden. Für jede Temperatur $T > 0$ K steht die Zahl der Leerstellen N_V fest. Die Boltzmann-Verteilung stellt den Zusammenhang zwischen T und N_V her.

Besteht der Kristall aus N Atomen, so hängt die Zahl der Leerstellen N_V mit der Temperatur T wie folgt zusammen (vgl. [8], S. 585):

$$\frac{N_V}{N - N_V} = e^{-\frac{E_V}{k_B \cdot T}}$$

Ist N_V sehr viel kleiner als N, so vereinfacht sich die Gleichung zu

$$\frac{N_V}{N} = e^{-\frac{E_V}{k_B \cdot T}} \tag{16}$$

Diese Gleichung entspricht der aus Kapitel 2.3 bereits erwähnte Boltzmann-Verteilung und gibt im thermischen Gleichgewicht die Wahrscheinlichkeit für die Nichtbesetzung von N_V Gitterplätzen an. Der Faktor p_V der e-Funktion fällt für unendliche Systeme weg; in Materie liegt bekanntlich eine sehr große Anzahl an Atomen vor.

In Anhang A, Teil b) findet man die Herleitung für die Boltzmann-Verteilung. Gleichung (16) kann aber auch bereits aus Gleichung (15) entwickelt werden. Für $N_V << N$ strebt nämlich einerseits $\ln(1 - x)$ gegen $\ln(1)$ und damit gegen Null, andererseits geht $1 - 2 \cdot x$ gegen Eins. Mit $x = \frac{N_V}{N}$ und $E_V = \varepsilon$ ergibt sich

$$\frac{k_B \cdot T}{E_V} = -\frac{1}{ln\left(\frac{N_V}{N}\right)},$$

und das ist gerade die umgestellte Boltzmann-Formel.

Zählt man nun die Leerstellen aus, so lässt sich aus ihrer Anzahl die Temperatur des Kristalls bestimmen. E_V ist dabei die Energie, die aufgebracht werden muss, um ein Atom aus seiner Bindung mit den Nachbaratomen zu lösen.

Heterogen: Es werden nun Leerstellen in heterogener Materie betrachtet. Auf dem Nachbarplatz eines Natriumatoms befindet sich ein Chloratom und umgekehrt; es liegen Paare vor. Wird die Temperatur des Kristalls erhöht, so gerät die geordnete Struktur durcheinander. Die Paare werden getrennt, da der eine Partner von seinem Platz im Gitter verschwindet.

Bei zwei unterschiedlichen Atomsorten existieren auch zwei unterschiedliche Arten von Leerstellen, so dass eigentlich kein binäres sondern ein quartäres System vorliegt (Abbildung 22).

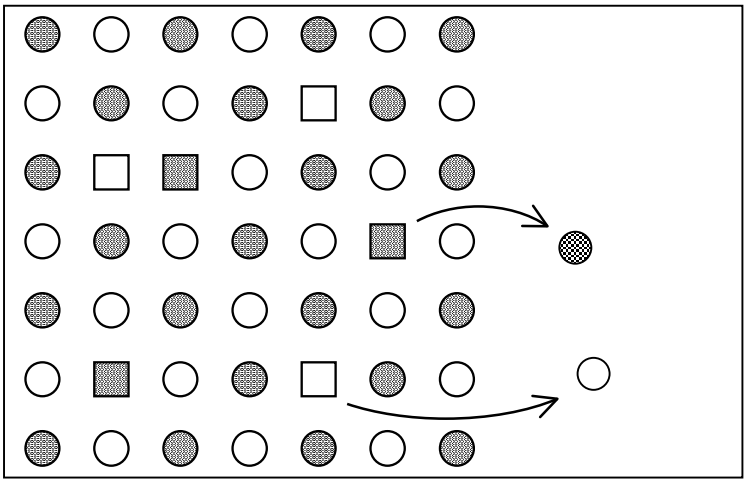


Abbildung 22: Leerstellen in *heterogener* Materie (bspw. Natriumchlorid): Bei zwei unterschiedlichen Atomsorten (Kreise) sind zugleich zwei unterschiedliche Arten von Leerstellen (Quadrate) vorhanden (vgl. [8], S. 585), da die Bindungsenergien E_{AV} und E_{BV} nicht exakt identisch sein können.

Für die Leerstellen-Konzentration der Atomsorte A und der Atomsorte B gilt jeweils:

Leerstelle eines A-Atoms	Leerstelle eines B-Atoms
$\frac{N_{AV}}{N} = e^{-\frac{E_A}{k_B \cdot T}}$	$\frac{N_{BV}}{N} = e^{-\frac{E_B}{k_B \cdot T}}$

k_B ist in beiden Fällen die Boltzmann-Konstante und darf nicht mit dem Index "B" der Atomsorte B verwechselt werden. Da in der Natur die Bindungsenergien für zwei verschiedene Stoffe nie exakt gleich sein können, gilt $E_A \neq E_B$. Beim Natriumchlorid bspw. ist die Bindungsenergie von Natrium größer als von Chlor. Demzufolge sind mehr Chlor-Leerstellen als Natrium-Leerstellen zu erwarten. Ist die Anzahl der Chlor- und der Natrium-Leerstellen gleich, so ist der Kristall elektrostatisch neutral.

5 Anwendung der Lagrange-Funktion auf gesellschaftliche Prozesse

5.1 Die homogene Gesellschaft

5.1.1 Die drei Staatsformen

Statt eines physikalischen Systems soll nun das gesellschaftliches System betrachtet werden. Lassen sich auch in der homogenen Gesellschaft Phasen und Phasenübergänge beobachten?

Diese Frage muss vom politischen Standpunkt aus beantwortet werden. Fest, flüssig und gasförmig kann in Analogie zu den Staatsformen Hierarchie, Demokratie und Anarchie betrachtet werden.

Was sind gesellschaftliche Freiheitsgrade? In der Physik sind es Druck und Temperatur, in der Gesellschaft sind es politischer Druck und Toleranz. Warum die Toleranz der Temperatur entspricht, soll in Kapitel 5.2.4 erläutert werden.

Ein gesellschaftliches System befindet sich im Zustand der

Hierarchie,	*Demokratie,*	*Anarchie,*
wenn	wenn	wenn
die Toleranz gering *der politische Druck sehr groß* *die persönliche Freiheit stark eingeschränkt*	*die Toleranz hoch* *der politische Druck wenig groß* *die persönliche Freiheit etwas eingeschränkt*	*die Toleranz sehr hoch* *der politische Druck gering* *die persönliche Freiheit gar nicht eingeschränkt*

ist.

Wenn die Toleranz gering und der eigene "Handlungsspielraum" auf Grund des politischen Drucks in einem hierarchischen Staat stark eingeschränkt ist, so ist es auch nicht möglich, sich beruflich zu entfalten. Der Einsatz von Maschinen wird unterbunden, Industrien können nicht entstehen. Dies hat zur Folge, dass die Wirtschaft nicht florieren kann und die Produktivität sowie das mittlere Einkommen pro Kopf in dem Land gering ist. Dies ist vor allem in den "Dritte-Welt-Ländern" und in Osteuropa der Fall. In der westlichen Welt und in Japan ist das Pro-Kopf-Einkommen deutlich höher (Abbildung 23). Charakteristisch für jedes Land ist also der *Lebensstandard* T.

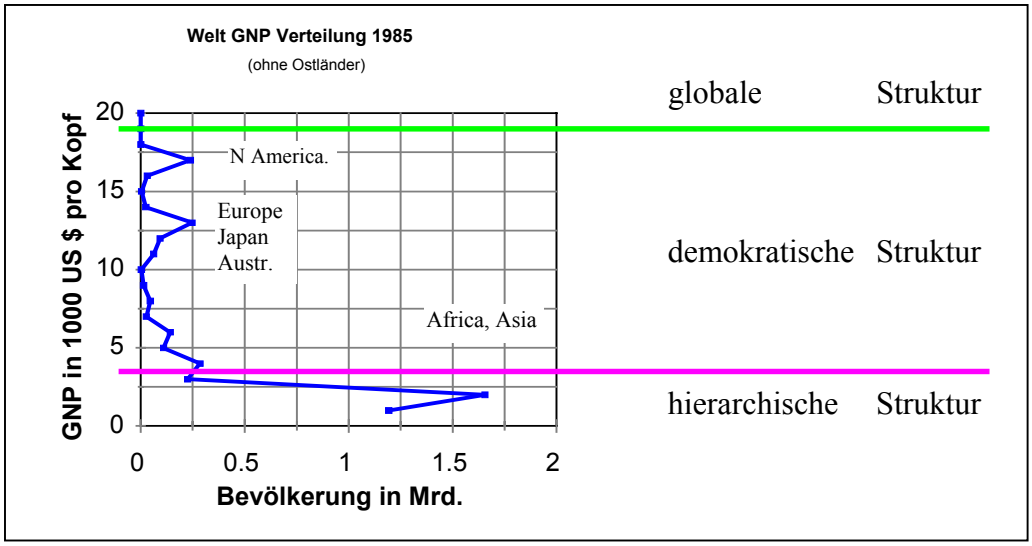


Abbildung 23: Das Bruttoinlandsprodukt (BIP / GNP) ist hier für einige Länder über der Bevölkerungszahl aufgetragen [11]. Weiterhin ist die jeweilige politische Struktur dargestellt. Länder mit hohem BIP sind demokratisch, Länder mit niedrigem BIP hierarchisch.

Für afrikanische und asiatische Länder liegt das BIP bei 200 – 3000 US $ pro Kopf, für Europa, Japan und Australien bei bis zu 18.000 US $ pro Kopf. Für einen Staat mit globaler Struktur lässt sich kein Beispiel angeben.

Die Staatsform geht also mit dem Lebensstandard einher. Ausnahmen bilden Kuwait, Saudi-Arabien und Indien. Hier ist davon auszugehen, dass religiöse Motive einen starken Einfluss ausüben. Da in den hierarchischen Staaten Kuwait und Saudi-Arabien sehr wenige Menschen besonders reich und sehr viele Menschen erheblich arm sind, ergibt sich ein verfälschtes Pro-Kopf-BIP.

Während der Parameter "T" in der Soziologie als *Toleranz* gedeutet werden kann, ist "T" in der Ökonomie als *Lebensstandard* aufzufassen.

5.1.2 Phasenübergang 1. Ordnung (Hierarchie – Demokratie)

In Kapitel 4.1.2 ist das Diagramm für den Phasenübergang für die Lagrange-Funktion abgebildet. Der Übergang erfolgte hier von "Ordnung" nach "Unordnung", weil dies die Bedingung L $\rightarrow$ Maximum! vorgab.

Zwischen Hierarchie, Demokratie und Anarchie und Ordnung, Unordnung, Chaos besteht der folgende Zusammenhang:

In einer		
Hierarchie	*Demokratie*	*Anarchie*
sind die Bindungen	sind die Bindungen	sind die Bindungen
starr.	*flexibel.*	*aufgehoben.*
Es herrscht	Es herrscht	Es herrscht
Ordnung.	*Unordnung.*	*Chaos.*

Deutet man die Lagrange-Funktion L in einem gesellschaftlichen System als Zufriedenheit Z, so ergibt sich in Analogie das folgende Phasendiagramm (Abbildung 24).

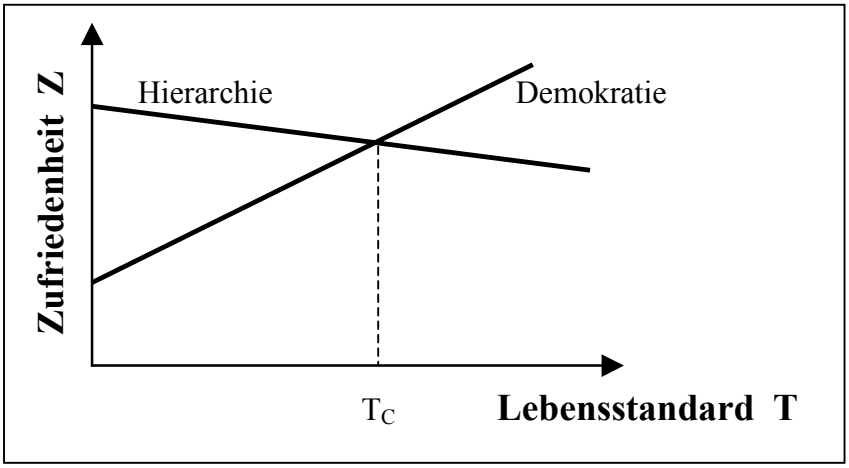


Abbildung 24: Diagramm für Übergang Hierarchie – Demokratie. Die Zufriedenheit Z der Menschen ist hier über dem Lebensstandard T aufgetragen. Der Schnittpunkt der beiden Lagrange-Funktionen ergibt den Punkt T_C; hier erfolgt der Strukturwandel "schlagartig".

Für ansteigende Werte des Lebensstandards kann ein Staat von der hierarchischen in eine demokratische Struktur übergehen. Dieser Übergang erfolgt – genau wie in der Physik – abrupt. Um den Phasenübergang einzuleiten, muss Energie aufgebracht werden, um die starren Bindungen innerhalb der Hierarchie aufzubrechen. Die aufgebrachte "Schmelzwärme" muss also die Umwandlung von der festen in die flexible Struktur bewirken. Dieser Aufwand ist mit Arbeit verbunden und lässt sich in einem politischen System mittels *Revolutionen* (die mit hohen Kosten verbunden sind) und anhaltenden *finanziellen Transferleistungen* bewerkstelligen. Nur bei permanentem Transferleistungen ist es möglich, die nach dem Übergang entstandene neue Phase der Demokratie mit der Zeit zu festigen.

Das Umwandeln von einer starren in eine flexible Struktur ist ein Prozeß, der meist mit Gewalt verbunden ist und mehrere Monate oder auch Jahre andauern kann. Dies kann für das

entsprechende Land eine schwere Belastung sein, falls der Übergang nicht so friedlich verläuft, wie es in der ehemaligen DDR der Fall war.

Dass auch Europa mit der Zeit "geschmolzen" ist, verdeutlichen Abbildung 25 a) und b), sowie Abbildung 26 a) und b) [20]. Der dunkle Grauton (Grau-80%) entspricht dem Zustand Hierarchie, der hellere Grauton (Grau-50%) dem Zustand Übergang und der hellste Grauton (Grau-25%) dem Zustand Demokratie:

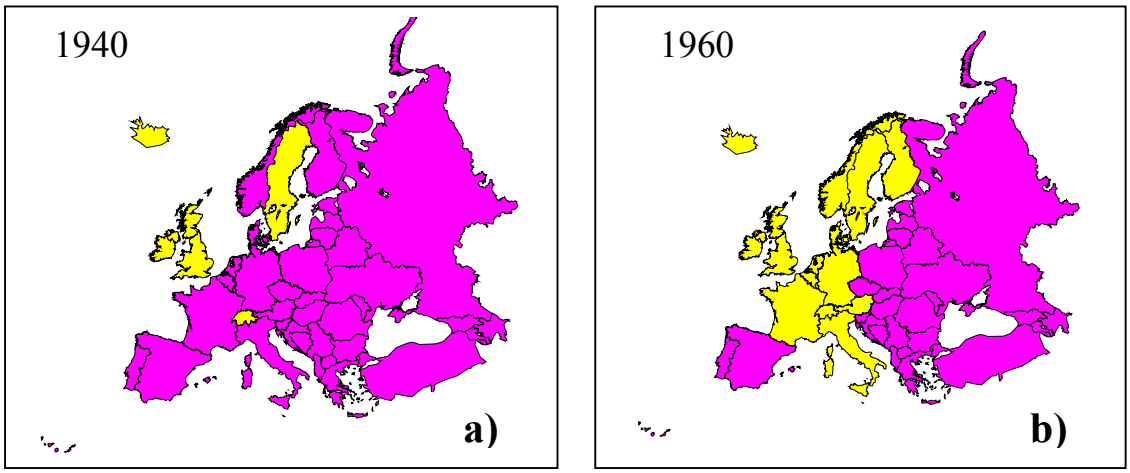


Abbildung 25: a) Europa ist 1940 weitgehend hierarchisch. Ausnahmen sind CH, GB, IR, IS und S. b) Bis 1960 fanden dann A, B, DK, F, I, L, N, NL und SF den Weg zur Demokratie.

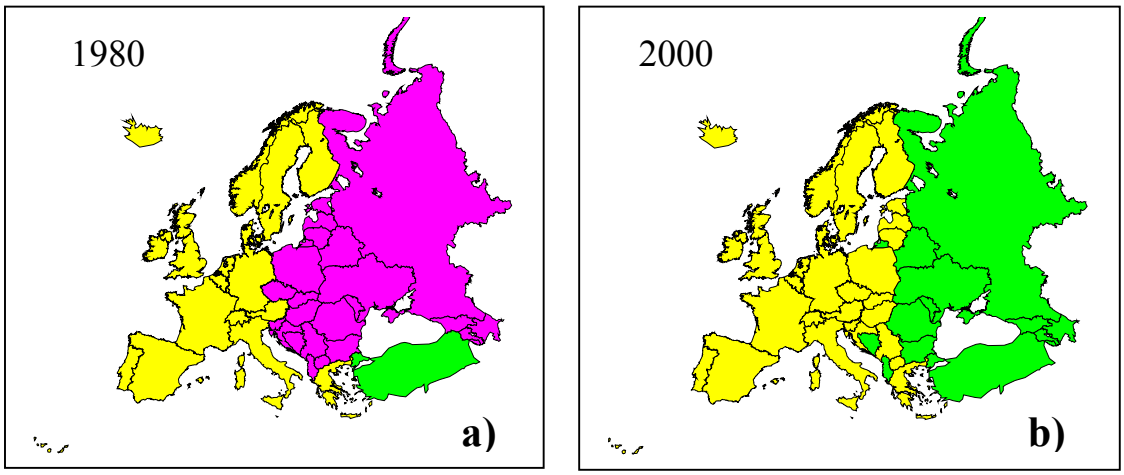


Abbildung 26: a) 1980 ist der Westen Europas ganz "geschmolzen" (hinzu kamen: E, GR und P), der Osten bleibt weiterhin hierarchisch. Die Türkei dagegen befindet sich im Umbruch. b) Hierarchische Staatsformen sind nicht mehr vorhanden, der Westen sowie einige Ostblockländer sind demokratisch. Die restlichen Länder des Ostens befinden sich im Übergang.

Es ist zu erwarten, dass sich der "Schmelzvorgang" von Westen nach Osten in den nächsten 20 Jahren weiter fortsetzen wird, so dass im Jahr 2020 ganz Europa nur noch aus demokratischen Ländern besteht. *Das Eis wäre gebrochen...*

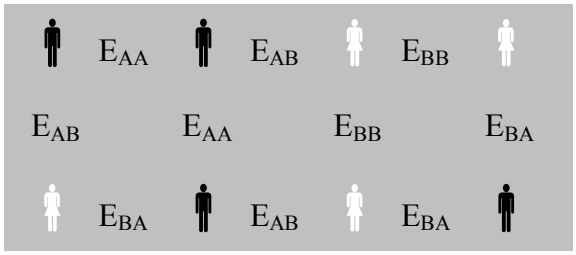
5.2 Die heterogene (binäre) Gesellschaft

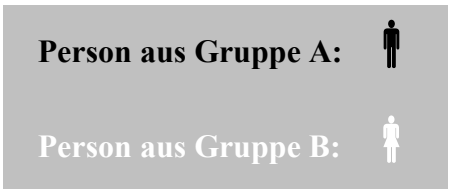
Besteht ein gesellschaftliches System aus K unterschiedlichen Gruppen mit $K \neq 1$, so bezeichnet man das System als *heterogen*. Im Fall $K = 2$ nennt man das System *binär*. Das nun folgende Modell wird auf ein binäres System angewendet; es kann natürlich auch für ein heterogenes System verwendet werden.

5.2.1 Das Modell der regulär gebundenen Gesellschaft

Betrachtet werden zwei gesellschaftliche Gruppen A und B. Hierbei kann es sich um Katholiken und Nichtkatholiken, Ausländer und Deutsche, Männer und Frauen usw. handeln.

Die Personen beider Gruppen sind nun durch Emotionen miteinander verbunden.





Dabei haben E_{AA}, E_{AB}, E_{BA} und E_{BB} folgende Bedeutung:

E_{AA}: Die Bindung einer Person aus Gruppe A an eine Person aus der eigenen Gruppe.

E_{AB}: Die Bindung einer Person aus Gruppe A an eine Person aus Gruppe B.

E_{BA}: Die Bindung einer Person aus Gruppe B an eine Person aus Gruppe A.

E_{BB}: Die Bindung einer Person aus Gruppe B an eine Person aus der eigenen Gruppe.

Während für Atome $E_{AB} = E_{BA}$ gilt, unterscheiden sich E_{AB} und E_{BA} für Gesellschaften.

Die Empfindungen füreinander können von unterschiedlicher Art sein: entweder mag man sich oder man mag sich nicht oder man ist sich gleichgültig. Die vier Bindungen sind also positiv, Null oder negativ:

$E_{AA}, E_{AB}, E_{BA}, E_{BB} > 0$

$E_{AA}, E_{AB}, E_{BA}, E_{BB} = 0$

$E_{AA}, E_{AB}, E_{BA}, E_{BB} < 0$

5.2.2 Gesellschaftsstrukturen

Wenn T gleich Null gesetzt wird, bleibt nur der Ausdruck für die Gesamtbindungsstärke übrig: $L(x) = E(x)$. Wie bereits aus dem physikalischen Teil bekannt ist, lässt sich E durch folgende Gleichung ausdrücken:

$$E = N \cdot \{E_{AA} + (E_{BB} - E_{AA}) \cdot x + \varepsilon \cdot x \cdot (1 - x)\}$$

Hierbei ist

$$\varepsilon = (E_{AB} + E_{BA}) - (E_{AA} + E_{BB}).$$

Weil ε kleiner, größer oder gleich Null sein kann, muss eine Fallunterscheidung vorgenommen werden. Innerhalb dieser Fälle lassen sich weitere Fälle unterscheiden, weil Wert und Vorzeichen von E_{ij} ($i, j \in \{A, B\}$) berücksichtigt werden müssen [11] [13]. Dies soll im Folgenden geschehen.

1. $\varepsilon > 0$: Koordination

In diesem Fall ist $(E_{AB} + E_{BA}) > (E_{AA} + E_{BB})$. Die Bindung an die fremde Gruppe ist also größer als an die eigene Gruppe.

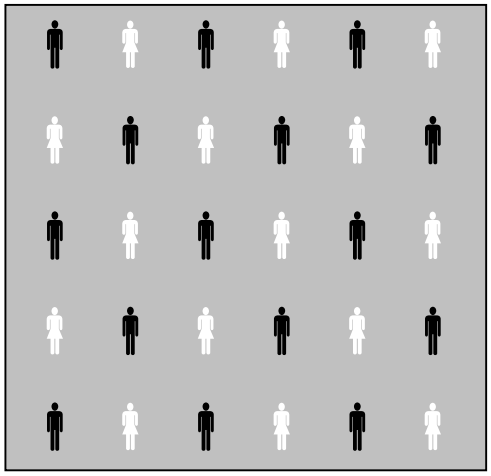


Abbildung 27: Durch bevorzugte Bindung an die *fremde* Gruppe entstandene Ordnung. Das Muster ist schachbrettförmig. Jedes Gruppenmitglied hat als Partner ein Mitglied aus der jeweiligen anderen Gruppe.

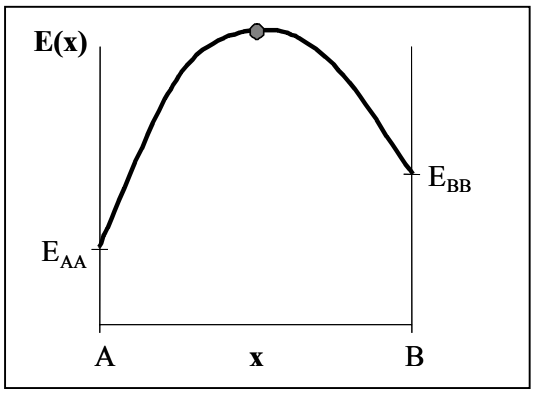


Abbildung 28: Der Funktionsgraph E(x) ist eine nach unten geöffnete Parabel, wenn $\varepsilon > 0$ ist. Sie hat an der Stelle $x = 0{,}5$ ihren maximalen Wert. Die Gesellschaft ist maximal zufrieden, wenn beide Gruppen gleich groß sind, da alle Gruppenmitglieder partnerschaftliche Beziehungen eingehen können.

Abbildung 28 zeigt den zu Abbildung 27 gehörigen Funktionsgraph L(x) (mit T = 0).

In diesem Fall ist also $(E_{AB} + E_{BA}) > (E_{AA} + E_{BB})$. Weiterhin kann zwischen $E_{AB} = E_{BA}$ und $E_{AB} \neq E_{BA}$ unterschieden werden. Dies soll in 1a und 1b geschehen.

1a. $E_{AB} = E_{BA}$:

Beide Gruppen empfinden Sympathie füreinander; die Mitglieder beider Gruppen profitieren gleichermaßen von der Verbindung. Ein Beispiel hierfür ist die partnerschaftliche Beziehung zwischen Männern und Frauen oder zwischen Handelspartnern. Diese Bindung an die eigene Gruppe ist zwar positiv, doch die Bindung an die andere Gruppe ist stärker.
Der Wert von ε wird noch größer, wenn E_{AA} und E_{BB} negative Werte annehmen. In partnerschaftlichen Beziehungen wäre die Ursache dafür Eifersucht.

1b. $E_{AB} \neq E_{BA}$:

Hier sind die Gruppen nicht gleichberechtigt, da die eine Gruppe von der anderen mehr profitiert als umgekehrt. Weil die eine Gruppe über die andere dominiert, lassen sich als Beispiele hierarchische Strukturen anführen: das Verhältnis zwischen Mutter und Kind, zwischen Arbeitgeber und Arbeitnehmer, zwischen Offizier und Rekrut. Ein Beispiel aus der Geschichte war das Verhältnis zwischen dem Adel, der sehr reich war, und den Bauern, die (fast) nichts besaßen. Die "Phase" der hierarchischen Struktur konnte nur durch einen "Phasenübergang" in die "Phase" der demokratischen Struktur umgewandelt werden. In Frankreich entsprach dem Phasenübergang die Französische Revolution. Weitere Erläuterungen finden sich im Unterpunkt 2a.

2. $\varepsilon = 0$: Integration

In diesem Fall ist $(E_{AB} + E_{BA}) = (E_{AA} + E_{BB})$. Beide Gruppen sind vollständig gemischt. Es besteht keine spezielle Vorliebe, weder für die eigene noch für die fremde Gruppe. Sind die Größen E_{AA}, E_{AB}, E_{BA} und E_{BB} gleich Null, so herrscht Gleichgültigkeit (siehe 2.b). Der Fall, dass die Größen alle denselben Wert haben, soll in 2.a diskutiert werden.

Die Abbildungen befinden sich auf der nächsten Seite.

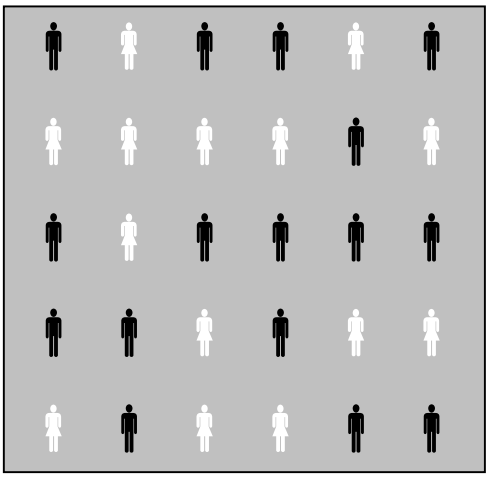


Abbildung 29: Eine chaotische Struktur entsteht, wenn die Bindung an eigene und fremde Gruppenmitglieder entweder gleich Null oder genau gleich ist. Letzteres besagt demzufolge, dass den Personen beider Gruppen die Besetzung des Nachbarplatzes gleichgültig ist.

Der zugehörige Funktionsgraph L(x) (mit T = 0) sieht dann wie folgt aus:

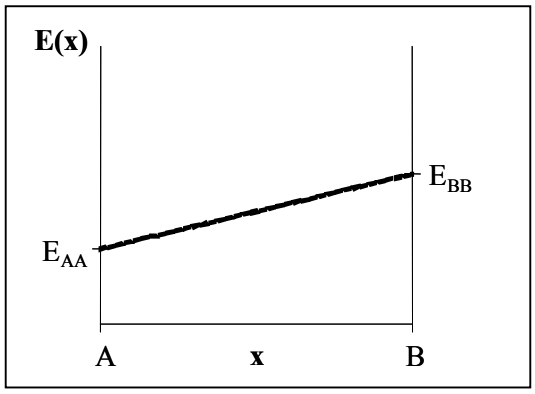


Abbildung 30: Der Funktionsgraph E(x) ist eine Gerade, wenn ε = 0 ist. Sie hat an jedem Punkt x keinen maximalen Wert. Die Gesellschaft ist in jedem Fall zufrieden, keine Gruppe wird bevorzugt, es herrscht Gleichgültigkeit.

2a. $(E_{AB} + E_{BA}) = (E_{AA} + E_{BB}) > 0$:

Für die fremde Gruppe empfindet man genauso viel Sympathie wie für die eigene Gruppe. Die Summen auf beiden Seiten der Gleichung müssen *genau gleich* sein, was in der Natur nicht verwirklicht wird. Es handelt sich hier um einen Idealzustand. Es ist allerdings möglich, dass die Bedingung durch ein Gesetz *in der Gesellschaft* doch erfüllt wird. Das Motto der Französischen Revolution „Freiheit, Gleichheit, Brüderlichkeit“ ist für die obige Bedingung ein Beispiel, wobei der Gleichheit das Zeichen "=" und der Brüderlichkeit das Zeichen ">" entspricht. Die Bürger Frankreichs wollten *Demokratie*.

2b. $(E_{AB} + E_{BA}) = (E_{AA} + E_{BB}) = 0$:

Zwischen den Mitgliedern beider Gruppen bestehen keine Bindungen mehr, es herrscht Apathie. Alle Personen sind vollkommen integriert; man spricht auch von der globalen Gesellschaft. Diesen Zustand findet man z.B. bei Menschen in Fußgängerzonen und bei Kulturveranstaltungen.

3. $\varepsilon < 0$: Segregation

In diesem Fall ist $(E_{AB} + E_{BA}) < (E_{AA} + E_{BB})$. Die Bindung an die eigene Gruppe ist stärker als an die fremde Gruppe.

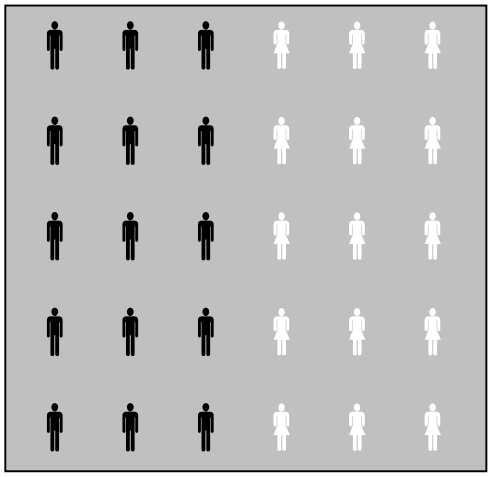


Abbildung 31: Durch bevorzugte Bindung an die *eigene* Gruppe entstandene Ordnung. Die Gruppenmitglieder wollen jeweils unter sich sein. An der Grenzfläche können bei negativen Empfindungen für die andere Gruppe Spannungen auftreten.

Der zugehörige Funktionsgraph L(x) (mit T = 0) sieht dann wie folgt aus:

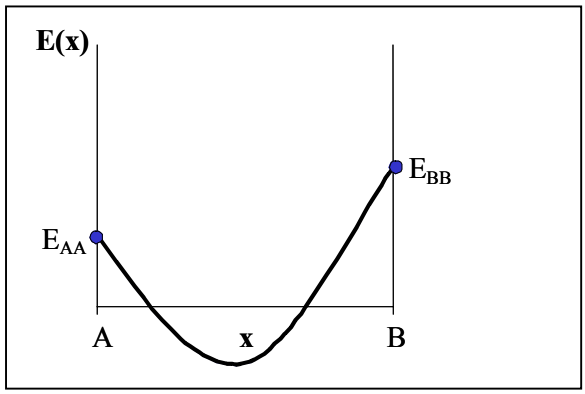


Abbildung 32: Der Funktionsgraph E(x) ist eine nach oben geöffnete Parabel, wenn $\varepsilon < 0$ ist. Sie hat an den Randpunkten $x = 0$ und $x = 1$ ihre maximalen Werte. Die Gesellschaft ist maximal zufrieden, wenn die Gruppenmitglieder mit Personen aus der eigenen Gruppe zusammen sind.

3a. $(E_{AB} + E_{BA}) > 0$:

Die Bindung an die fremde Gruppe ist zwar positiv, aber die Bindung an die eigene Gruppe ist stärker. Dies ist der Grund für die Entstehung von Staaten, wie es in Europa und in vielen anderen Teilen der Erde der Fall ist. Man spricht von einer multikulturellen Gesellschaft. Menschen mit gleichem Aussehen und gleicher Sprache bleiben lieber unter sich: man ist sich "vertraut". Jede Gruppe kann aber auch Personen der jeweils anderen Gruppe aufnehmen. Weitere Erläuterungen hierzu befinden sich in Kapitel 5.2.4.

3b. $(E_{AB} + E_{BA}) < 0$:

Die Bindung an die eigene Gruppe ist positiv, gegenüber der fremden Gruppe empfindet man negative Gefühle wie Hass und Neid. Beispiele für aggressive Gesellschaften sind die Konflikte in Nordirland und in Israel. Aber nicht nur die Gegenwart zeigt solche Beispiele. Betrachtet man Pläne von Städten Europas aus dem Mittelalter, so ist eine deutliche Abgrenzung zum Umfeld zu erkennen. Dies äußert sich in architektonischen Maßnahmen, die ergriffen werden mussten: Städte wurden kreisförmig angelegt. Auf diese Weise war es möglich, den Attacken aggressiver Bewohner des Umlandes Einhalt zu gebieten, da die Grenzfläche zu den Feinden minimal war. Diese Art der Einigelung haben die Menschen der Natur abgeschaut, denn nicht nur erwähntes Tier weiß sich durch kugelförmige "Grenzflächenminimierung" vor seinen Feinden zu schützen. Ein Beispiel aus der Physik ist das Zusammenbringen von Wasser und Öl. Da sich das Öl mit dem Wasser nicht verträgt, verbleibt es kreisförmig auf der Wasseroberfläche. Das System trennt sich also vollständig.

Inwiefern sich aggressive Tendenzen im Phasendiagramm multikultureller Gesellschaften äußern, soll in Kapitel 5.3 erörtert werden.

5.2.3 Die Lagrange-Funktion einer binären Gesellschaft

Grundlage ist die Lagrange-Funktion, die – wie bereits erwähnt – in der Gesellschaft auch als Zufriedenheit gedeutet werden kann:

$$L(x) = N \cdot \{E_{AA} + x \cdot (E_{BB} - E_{AA}) + \varepsilon \cdot x \cdot (1-x) - T \bullet [x \cdot \ln(x) + (1-x) \cdot \ln(1-x) + \ln(2)]\} \rightarrow Max!$$

Die Herleitung dieser Gleichung ist dieselbe wie in der Physik, nur die Interpretation der Variablen ist anders.

Da die Größen E_{ij}, ε und T als Dimension die Emotion besitzen, ist die Dimension der Zufriedenheit L(x) ebenfalls die Emotion.

5.2.4 Bedeutung von T in der Gesellschaft

Mathematisch gesehen ist T der Lagrange-Parameter, in der Thermodynamik wird er als Temperatur gedeutet. Aber als was lässt sich T in einem sozialen System interpretieren?

Für T = 0 liegt ein geordnetes segregiertes System vor (siehe Abbildung 31). Durch Erhöhen von T können sich in dem segregierten System Mitglieder aus beiden Gruppen zu Paaren zusammenschließen. Da "Fremde" innerhalb der eigenen Gruppe akzeptiert werden, ist die geordnete Struktur leicht gestört (Abbildung 33).

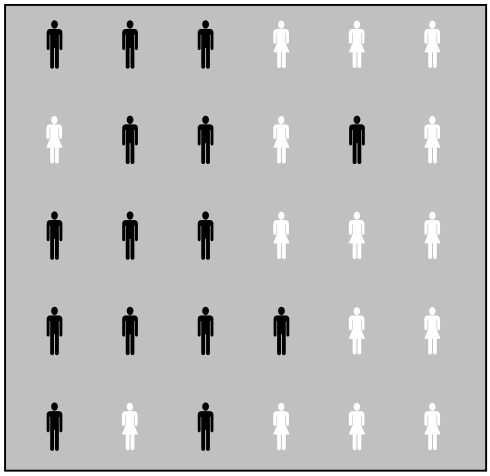


Abbildung 33: Unordnung: Die geordnete, segregierte Struktur enthält "Störstellen". Das geordnete Muster ist trotz Defekte noch zu erkennen, entstanden ist eine unordentliche Struktur. Beide Gruppen enthalten nun jeweils Personen der anderen Gruppe.

Steigen die Werte für T an, so steigt ebenso die Zahl der Paarbildungen. Beide Gruppen können sich leichter durchmischen, so dass infolgedessen die Integration in der zuvor segregierten Gesellschaft ansteigt. Bei vollständiger Integration hat jedes Mitglied der zahlenmäßig unterlegenden Gruppe einen Partner; bei zwei gleichmächtigen Gruppen sind nur Paarbildungen vorhanden, wie es in Abbildung 27 auf Seite 50 zu sehen ist. Weil für steigende Werte von T immer mehr Personen aus beiden Gruppen aufeinander zugehen, lässt sich T als "Toleranz" interpretieren. Somit lässt sich die Heiratshäufigkeit gemischter Ehen als Maß für die Toleranz verwenden und damit als Maß für die Integration(siehe auch [24], S. 229)

Man benötigt also eine "Wärmequelle", die das segregierte gesellschaftliche System in ein integriertes gesellschaftliches System überführen kann. In einer Gesellschaft bedeutet das, dass Vorurteile gegenüber der "andersartigen" Gruppe abgebaut werden müssen, um mehr fremde Personen in der eigenen Gruppe anzunehmen.

5.3 Das Phasendiagramm einer binären Gesellschaft

Wie lässt sich aus vorgegebenen Daten über Eheschließungen zwischen Deutschen (Gruppe A) und Ausländern (Gruppe B), die man vom Statistischen Bundesamt erhält,

- die Häufigkeit P der gemischten Eheschließungen und
- der Anteil x aller Menschen der Gruppe B bei den gemischten Eheschließungen

ermitteln?

Das Statistische Bundesamt versendet solche Daten in Form von Tabellen, wie es Abbildung 34 zeigt.

	A weiblich	B weiblich
A männlich	a	b
B männlich	c	d

Abbildung 34: In statistischen Tabellen bezüglich Eheschließungen nach Staatsangehörigkeit sind für Männer und Frauen der beiden Gruppen A und B die jeweilige Anzahl der Eheschließungen (a, b, c, d) dargestellt. Die Gruppe B sei in diesem Fall die Gruppe der Ausländer.

Berechnung von P:

Die Häufigkeit der gemischten Eheschließungen ergibt sich, indem man die Anzahl der gemischten Ehen durch die Anzahl aller Ehen dividiert. Man erhält folgende Formel:

$$P = \frac{b + c}{a + b + c + d} \tag{17}$$

Berechnung von x:

Der Anteil aller Menschen der Gruppe B bei den gemischten Eheschließungen ergibt sich, indem man die Anzahl der Menschen der Gruppe B durch die Anzahl aller Menschen dividiert. Man erhält folgende Formel:

$$x = \frac{2 \cdot d + b + c}{2 \cdot (a + b + c + d)} \tag{18}$$

Für das Heiratsdiagramm muss ferner die theoretische Kurve mit der Funktionsvorschrift $P(x) = 2 \cdot x \cdot (1-x)$ eingezeichnet werden. Punkte, die unterhalb der Kurve liegen, zerfallen in die beiden Randpunkte links und rechts auf der Kurve. Punkte, die dagegen auf oder sehr nahe

der Kurve liegen, deuten darauf hin, dass das System ideal gemischt ist. "Sehr nahe" bedeutet, dass ein relativer Fehler zugelassen ist. Dieser Fehler ist abhängig von der Zahl der Eheschließungen. Bezeichnet man diese mit Z, so hat der Prozentsatz des relativen Fehlers den Wert $1/\sqrt{Z}$. Je größer die Zahl der Eheschließungen, desto kleiner der Fehler.

Um das T-x-Diagramm für die Gesellschaft darstellen zu können, geht man zum P-x-Diagramm über. Gleichung (15) auf Seite 37 verwendet man für Atome. Da man aber in der Gesellschaft Paare auszählen kann, gebraucht man eine andere Gleichung (vgl. [9], S. 241):

$$\boxed{P_{AB} = 2 \cdot x \cdot (1 - x)} \tag{19}$$

Gleichung (15) auf Seite 37 und Gleichung (19) lassen sich ineinander transformieren, Dies soll im Folgenden gezeigt werden.

Weil ε < 0 ist, lässt sich Gleichung (15) wie folgt schreiben:

$$-\frac{T(x)}{|\varepsilon|} = \frac{-(1-2x)}{\ln(x) - \ln(1-x)}$$

Setzt man für x die Werte 0, 1/2 und 1 ein, so ist der Ausdruck auf der rechten Seite der Gleichung nicht mehr definiert. Verwendet man dagegen die Regel von L'Hospital und formt entsprechend um, so ergeben sich "vernünftige" Werte:

$$-\frac{T(x)}{|\varepsilon|} = \frac{-(1-2x)}{\ln(x) - \ln(1-x)} \xrightarrow{x \to 0;\frac{1}{2};1} \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}} = \frac{2}{\frac{1-x+x}{x \cdot (1-x)}} = 2 \cdot x \cdot (1-x) \xrightarrow{x \to 0;\frac{1}{2};1} 0;\frac{1}{2};1$$

Nach dem binomischen Lehrsatz ist $P_{AB} = 2 \cdot x \cdot (1-x)$ die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten der Verbindung (Heirat) zwischen einer Person aus der Gruppe A und einer Person aus der komplementären Gruppe B. Spielt das Vorzeichen von ε keine Rolle, so ist

$$\boxed{P_{AB} \approx \frac{T(x)}{\varepsilon}} \tag{20}$$

Die Wahrscheinlichkeit P_{AB} gibt also die Heiratshäufigkeit zwischen Personen der beiden Gruppen A und B wieder.

Zeichnet man die theoretische Kurve $P(x) = 2 \cdot x \cdot (1-x)$ ein, so ergibt sich folgendes Bild:

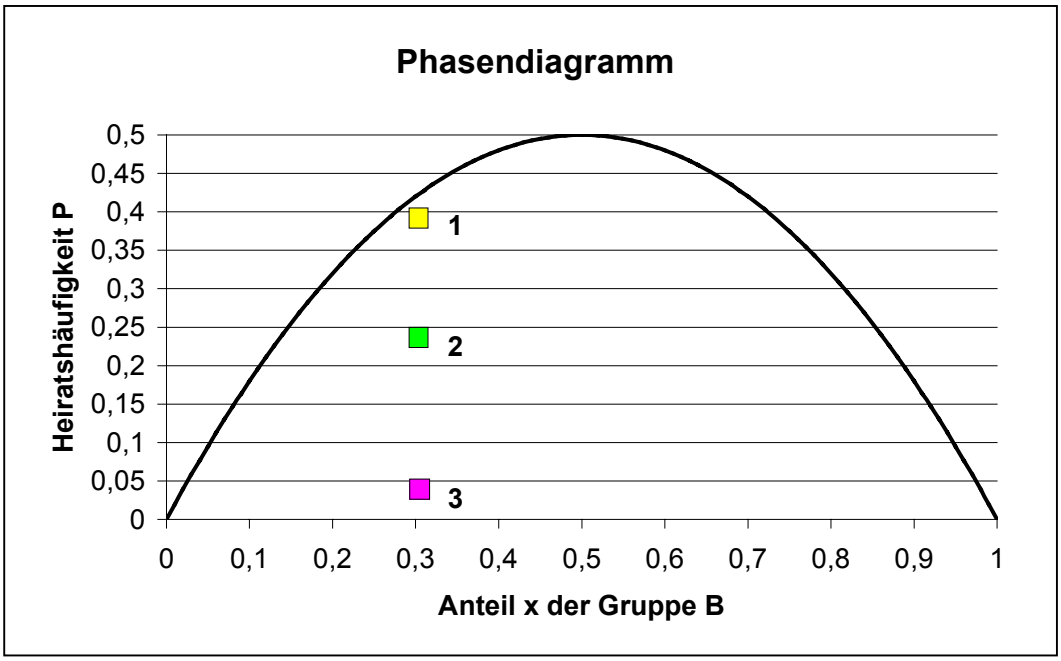


Abbildung 35: Heiratsdiagramm: Die Heiratshäufigkeit P ist hier über dem Anteil x der Gruppe B aufgetragen. Weiterhin ist die theoretische Kurve zu sehen. Für x = 30 % sind drei unterschiedliche Heiratshäufigkeiten angegeben. Entsprechende Erläuterungen stehen im Text.

Der Anteil der Gruppe B soll hier im Beispiel 30 % betragen. Für diesen Punkt sind drei unterschiedliche prozentuale Werte für gemischte Eheschließungen angegeben. Auf Grund des unterschiedlichen Abstandes von der idealen Kurve ergeben sich drei völlig verschiedene Deutungen:

- *Punkt 1* liegt sehr nahe an der idealen Kurve; der relative Fehler für die Abweichung ist minimal. Zu diesem Zeitpunkt sind die Mitglieder der Gruppe B vollständig integriert, da nahezu jeder aus Gruppe B einen komplementären Partner hat. Die Toleranz hat in diesem Fall fast ihren maximalen Wert erreicht. Spannungen oder Konflikte sind nicht zu erwarten.
- *Punkt 2* liegt mitten in der "verbotenen Zone". Der Punkt existiert nicht und zerfällt in seine beiden Randpunkte: die beiden Gruppen segregieren. Das eine Gebiet besteht zu ungefähr 85 % aus Personen der Gruppe A und zu 15 % aus Personen der Gruppe B. Im anderen Gebiet dominiert die Minderheit: hier beträgt der Anteil der Gruppe A nur etwa 15 % und der Anteil der Gruppe B 85 %. Die Toleranz ist zwar hoch, jedoch besteht in beiden Gruppen überwiegend die Tendenz, vorzugsweise unter sich zu bleiben. Konflikte könnten vereinzelt auftreten.
- *Punkt 3* liegt am weitesten von der idealen Kurve weg. Beide Gruppen enthalten jeweils nur etwa 2 % der anderen Gruppe – sie sind fast vollständig getrennt. Hier bestehen Aggressionen zwischen den Mitgliedern beider Gruppen. Sollte dies nicht der Fall sein, so

ist doch die Gefahr von Konflikten und Anschlägen sehr hoch. Die Toleranz ist gleich Null, Abweichungen davon werden meist nicht geduldet. Vor allem Nordirland und Israel sind immer noch aktuelle Krisenherde.

5.4 Beispiele für gesellschaftliche Phasendiagramme

Da die Statistik für Atome dieselbe ist wie für Personen, ist es möglich, auf die Physik und auf die Gesellschaft dieselben mathematischen Gesetze anzuwenden. Im Folgenden sollen Beispiele für gesellschaftliche Phasendiagramme angegeben werden. Es wird sich zeigen, dass die Phasendiagramme für zwei Gruppen den Phasendiagrammen für Zweistoffgemische ähneln. Als Beispiele sollen die Phasendiagramme von den binären Gruppen Katholiken – Nichtkatholiken, Ausländer – Deutsche und Schwarze – Nichtschwarze analysiert werden. Dabei wurden die Daten für die Phasendiagramme aus [9], [15] und [18] entnommen.

5.4.1 Katholiken – Protestanten – Sonstige

Zuerst sollen die Phasendiagramme für Eheschließungen zwischen Katholiken, Protestanten und Sonstigen diskutiert werden. Unter Sonstige fallen alle Personen, deren Religionszugehörigkeit weder evangelisch noch römisch-katholisch ist; dazu zählen jüdische Religionsgemeinschaften, Weltanschauungsgemeinschaften, Ostkirchen und christliche Sondergemeinschaften, andere Volks- und Weltreligionen sowie Personen, die ohne Gemeinschaft sind oder deren Angabe ungeklärt ist.

Es handelt sich in diesem Fall nicht um ein binäres, sondern um ein tertiäres System. Wenn man für diesen Fall das Phasendiagramm für nur zwei Gruppen betrachten möchte, so müssen die Werte auf der Abszisse und auf der Ordinate *normiert* werden.

Beispiel: Auf der Ordinate sollen die gemischten Eheschließungen zwischen Katholiken und Protestanten, auf der Abszisse der Anteil der Katholiken dargestellt werden.

Abszisse: Anteil der Katholiken + Anteil der Protestanten + Anteil der Sonstigen ergibt 100 %. Ohne den Anteil der Sonstigen sind es dementsprechend weniger. Damit aber die x-Achse von 0 – 100 % skaliert werden kann, muss der Anteil der Katholiken durch den Anteil aller (in diesem Fall Anteil der Katholiken + Anteil der Protestanten) dividiert werden.

Ordinate: Ohne den Anteil der Sonstigen liegt das Maximum der gemischten Eheschließungen nicht mehr bei $y = 0{,}5$ sondern tiefer. Der zugehörige x-Wert liegt auch nicht mehr bei 0,5 sondern links davon. Dividiert man das Maximum der gemischten Eheschließungen durch das Quadrat der Summe aus dem Anteil der Katholiken und dem Anteil der Protestanten, so erhält man als Maximum wieder $y = 0{,}5$.

Es soll zunächst die Frage untersucht werden, wie "gut" die beiden Gruppen Katholiken – Protestanten in Deutschland "gemischt" sind. Zu diesem Zweck soll Abbildung 36 betrachtet werden.

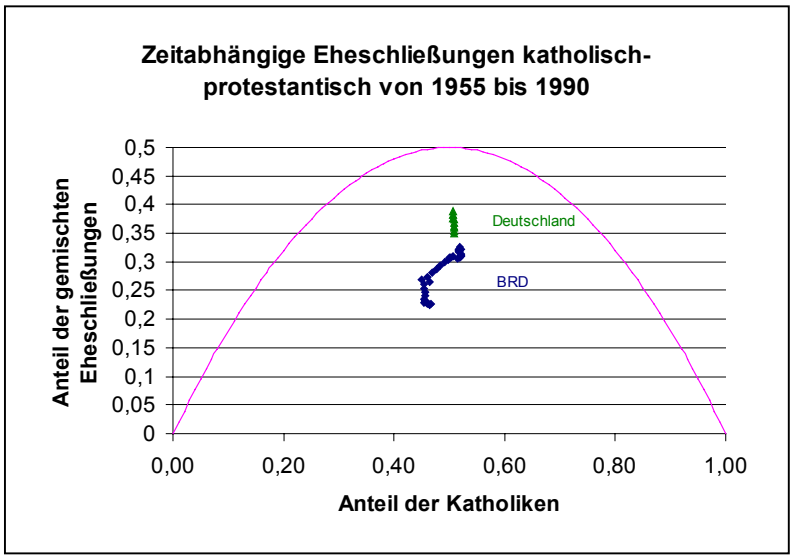


Abbildung 36: Anteil der Heiraten zwischen Katholiken und Protestanten in den alten Bundesländern (1955-90) und in Deutschland (1991-99). Auf der x-Achse ist der Anteil der Katholiken dargestellt.

Auf der x-Achse ist der Anteil der Katholiken, auf der y-Achse der Anteil der gemischten Eheschließungen dargestellt. Es handelt sich hier um *zeitabhängige* Eheschließungen, d.h. jeder y-Wert stellt den Heiratswert für ein bestimmtes Jahr dar. Von 1955 bis 1990 beziehen sich die Werte auf die alten Bundesländer, von 1991 bis 1999 auf Gesamtdeutschland. Wie man sieht, liegen die Werte alle im "verbotenen" Bereich: beide Gruppen segregieren und enthalten jeweils einen gewissen Anteil der anderen Gruppe. Im Laufe der Jahre sind immer mehr Personen aus beiden Gruppen eheliche Bindungen eingegangen. Die Toleranz ist also mit den Jahren angestiegen.

Seit 1991 gibt es in Deutschland fast so viele Katholiken wie Protestanten ($x = 0{,}5$). Gleichzeitig steigt die Toleranz bis 1999 kontinuierlich an. Deshalb laufen die Werte senkrecht auf den maximalen Wert ($y = 0{,}5$) zu.

In Abbildung 37 ist der Anteil der (normierten) gemischten Heiraten gegenüber der Zeit in Jahren aufgetragen. Von 1955 bis 1999 erkennt man den steigenden Verlauf der gemischten Heiraten und damit der Toleranz. Bei weiterem Anstieg ist zu erwarten, dass irgendwann der maximale Wert erreicht wird. Aber wann?

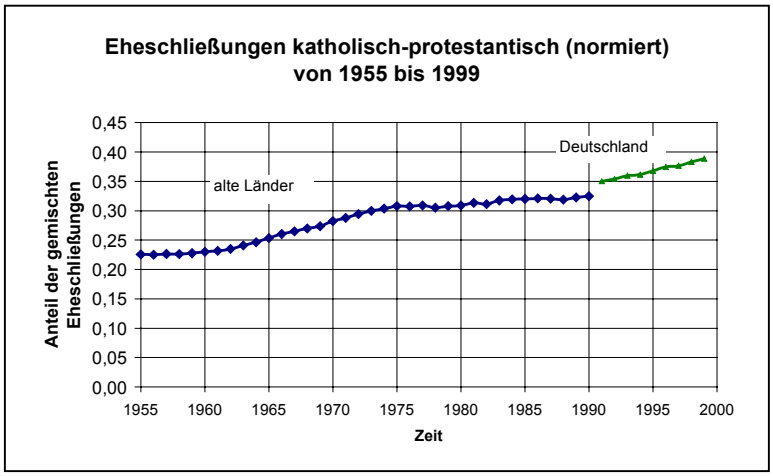


Abbildung 37: Der Anteil der Heiraten zwischen Katholiken und Protestanten in den alten Bundesländern und in Deutschland ist hier über der Zeit aufgetragen.

Rein mathematisch gesehen lässt sich die Frage leicht beantworten. Legt man durch alle Werte, die in Abbildung 37 zu sehen sind, die Regressionsgerade und extrapoliert diese bis $y = 0{,}5$, so ergibt sich ein x-Wert von ungefähr 2032. Dies würde bedeuten, dass beide Gruppen vollständig gemischt wären und jeder Katholik einen evangelischen Partner hätte. Die Struktur wäre geordnet, die Toleranz maximal und die Gesellschaft vollständig zufrieden. Diese Situation zeigt noch einmal Abbildung 38.

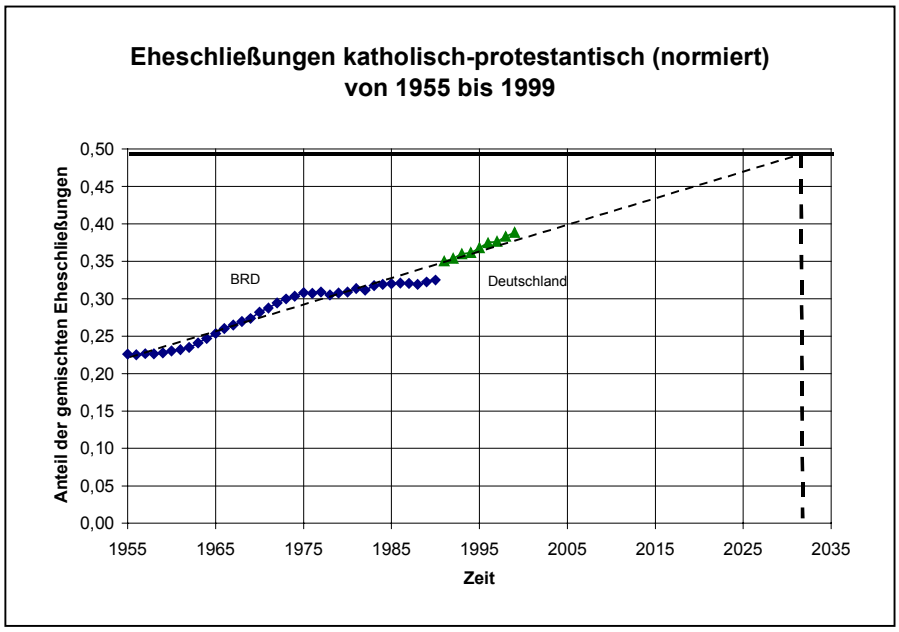


Abbildung 38: Der Anteil der Heiraten zwischen Katholiken und Protestanten in den alten Bundesländern und in Deutschland ist hier über der Zeit aufgetragen. Durch Extrapolation der Regressionsgeraden würde sich ergeben, dass beide Gruppen ungefähr im Jahr 2032 ideal gemischt sein würden; die Katholiken wären zu diesem Zeitpunkt vollständig integriert.

Als nächstes soll das Phasendiagramm für Katholiken und Sonstige betrachtet werden (Abbildung 39). Auf der x-Achse ist der Anteil der Sonstigen dargestellt. Von 1955 bis 1999 ist ein "diagonalförmiger" Verlauf zu erkennen. Der Anteil der Sonstigen hat sich mit den Jahren vergrößert, wobei gleichzeitig die Heiratshäufigkeit gestiegen ist.

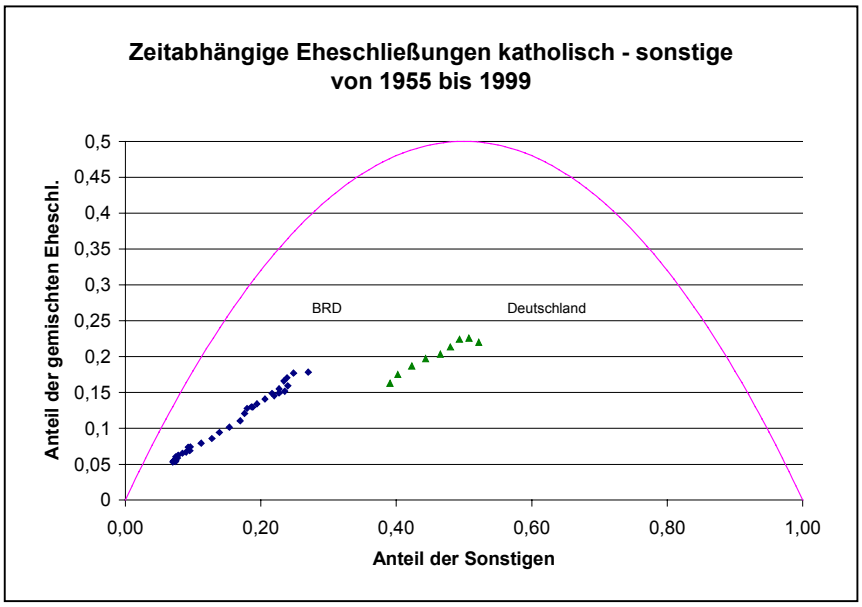


Abbildung 39: Anteil der Heiraten zwischen Katholiken und Sonstigen in den alten Bundesländern (1955-90) und in Deutschland (1991-99). Auf der x-Achse ist der Anteil der Sonstigen dargestellt.

Zwischen 1990 und 1991 ist ein Sprung innerhalb der x-Werte vorhanden. Durch die Öffnung der Grenzen zu Ostdeutschland sind ungefähr 10 % Sonstige zum bisherigen Anteil hinzugekommen, die *geheiratet* haben.. Diese haben aber *untereinander* geheiratet, da die Heiratshäufigkeit für gemischte Ehen zu diesem Zeitpunkt nicht angestiegen ist. Von 1991 an ist derselbe Anstieg der Heiratshäufigkeit zu beobachten wie vor 1990. D.h. durch das Wegfallen der Mauer hat sich an der Heiratshäufigkeit nichts geändert. Daher lässt sich theoretisch die Kurve für Deutschland an die Kurve für die alten Bundesländer anfügen. Fazit ist, dass die Sonstigen mit der Zeit bzgl. der Katholiken relativ gut integriert worden sind.

Eine zusätzliche Bestätigung dafür stellt Abbildung C.1 (siehe Anhang C) dar. Dort sind die gemischten Heiraten über der Zeit aufgetragen und man sieht, dass die Anzahl mit der Zeit ansteigt.

Das Phasendiagramm für Protestanten und Sonstige (Abbildung C.2) sieht fast genauso aus wie für Katholiken und Sonstige. Der einzige Unterschied besteht darin, dass die Kurven für die alten Bundesländer und für Deutschland jetzt nach oben verschoben sind. Während der höchste Datenpunkt für Katholiken und Sonstigen bei 22,6 % liegt, beträgt er bei Protestanten und Sonstigen 32,5 %. (siehe Anhang C)

Einen weiteren Unterschied zeigt das Heirat – Zeit – Diagramm (Abbildung C.3): Der Anstieg der Heiratsdaten ist steiler als bei den vorherigen beiden P – t – Diagrammen. Dies ist vor allem in den Jahren 1970 bis 1977 zu beobachten. (siehe Anhang C)

Wie man den Anteil der gemischten Heiraten in Abhängigkeit von der Zeit betrachten kann, so ist es ebenfalls interessant, den Anteil der entsprechenden Gruppe in Abhängigkeit zur Zeit zu setzen. Wird der Anteil der Katholiken und der Anteil der Protestanten zusammengefasst, so ergibt sich ein Diagramm, wie es Abbildung 40 zeigt.

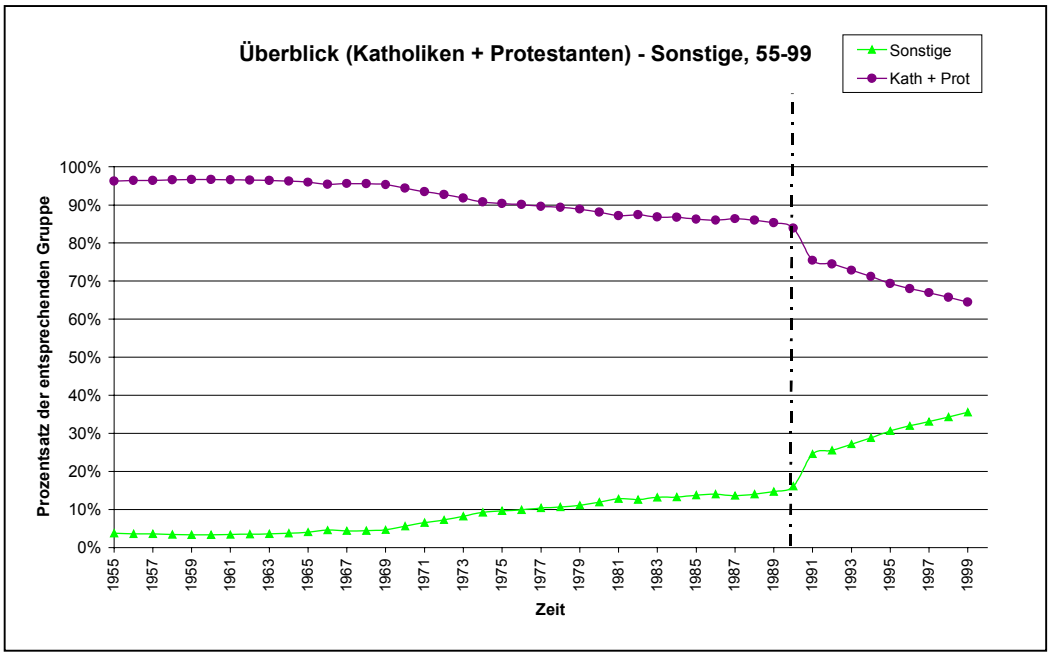


Abbildung 40: Der Prozentsatz der jeweiligen Gruppe ist hier über der Zeit aufgetragen. Jedoch sind hier die Anteile der Katholiken und Protestanten addiert worden ("Kreise").

Der Anteil der Katholiken und Protestanten ist mit der Zeit zurückgegangen. Vor allem ab 1990 ist ein drastischer Rückgang zu verzeichnen. Im Gegensatz dazu ist der Anteil der Sonstigen stark angestiegen. Wie bereits erläutert wurde, sind seit dem Wegfall der Mauer viele "andersartige Gläubige" hinzugekommen.

Der starke Anstieg signalisiert aber auch ein Umdenken in den Köpfen der Menschen: gegenüber anderen Religionen ist man toleranter geworden. Kirchenaustritte kommen immer öfter vor – Menschen "outen" sich als Atheisten oder treten anderen Religionen bei. Was bspw. in den fünfziger Jahren unvorstellbar gewesen wäre, ist heutzutage zum Trend geworden und wird akzeptiert. Insofern gerät die römisch-katholische und evangelische Kirche zunehmend in den Hintergrund.

Nach Abbildung 40 lässt sich folgendes Gedankenexperiment durchführen. Würde der Anteil der Sonstigen künftig zunehmen, während der Anteil der Katholiken und Protestanten

weiterhin abnähme, so würden zu einem bestimmten Zeitpunkt in Deutschland nur noch Sonstige leben. Wann wäre dies der Fall?

Voraussetzung ist natürlich, dass die Entwicklung in allen drei Gruppen bestehen bleibt. Mit den Werten für 1991 bis 1999 wird jeweils eine lineare Regression durchgeführt. Die berechnete Gerade wird jeweils durch die neun Punkte gelegt und extrapoliert. Die Gerade für die Sonstigen erreicht die 100 % - Marke bei $x = 2043$. Im Jahr 2043 würde es keine Katholiken und Protestanten mehr geben, sondern nur noch Sonstige (Abbildung 41).

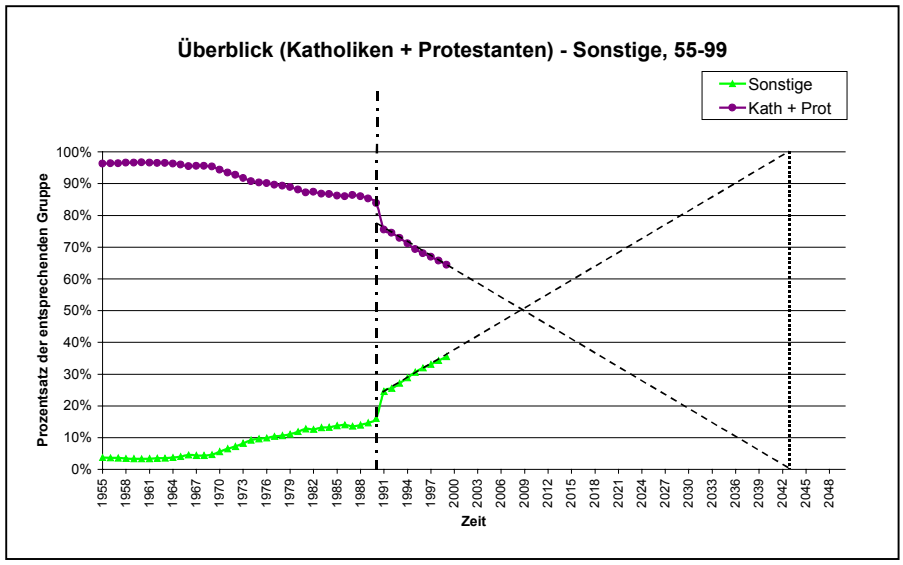


Abbildung 41: Dies ist Abbildung 40, wobei für die Datenpunkte jeweils lineare Regression durchgeführt wurde. Durch Extrapolation der Regressionsgeraden würde sich ergeben, dass ungefähr im Jahr 2043 der Anteil der Sonstigen auf 100 % angewachsen und der Anteil der Protestanten bzw. Katholiken auf Null Prozent zurückgegangen sein würde.

Betrachtet man nicht die Summe aus Katholiken und Protestanten sowie den Anteil der Sonstigen, sondern alle drei Gruppen gesondert, so ergeben sich Diagramme, wie sie in Abbildung C.4 und Abbildung C.5 in Anhang C zu sehen sind.

5.4.2 Katholiken – Nichtkatholiken

Zeitabhängige Eheschließungen

Im Folgenden soll nicht das tertiäre System, sondern das binäre System Katholiken - Nichtkatholiken betrachtet werden (Abbildung 42). Der Anteil der Sonstigen und der Protestanten wurde nun zusammengezählt. Auf der x-Achse ist der Anteil der Katholiken dargestellt. Von 1950 bis 1990 steigt die Heiratshäufigkeit an. Zwischen 1990 und 1991 ist

der "Sprung" zu sehen: der Anteil der Katholiken hat abgenommen und nimmt von 1991 an bei ungefähr gleichbleibender Heiratshäufigkeit weiterhin ab.

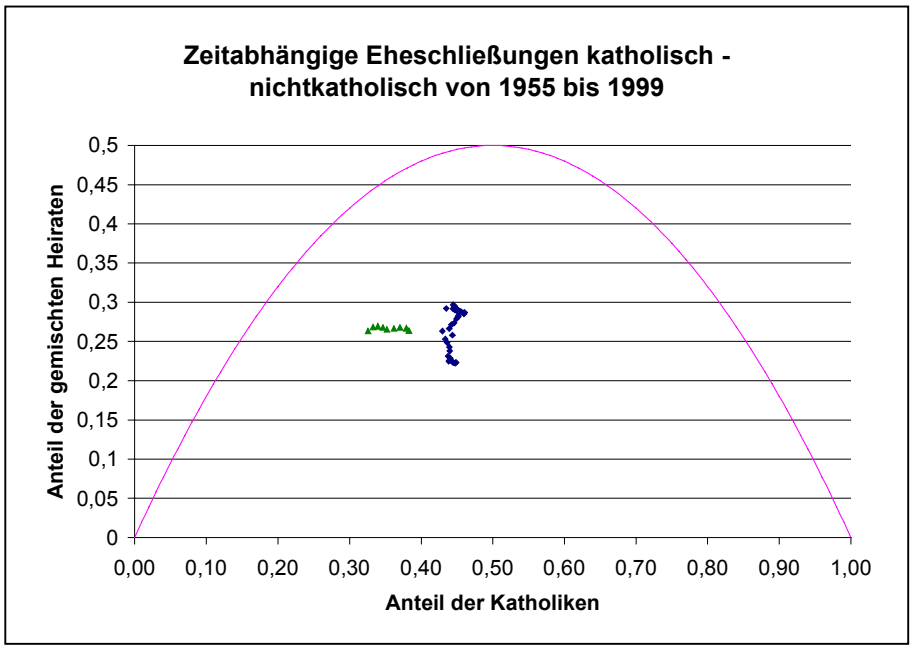


Abbildung 42: Anteil der Heiraten zwischen Katholiken und Nichtkatholiken in den alten Bundesländern (1955-90) und in Deutschland (1991-99). Auf der x-Achse ist der Anteil der Katholiken dargestellt.

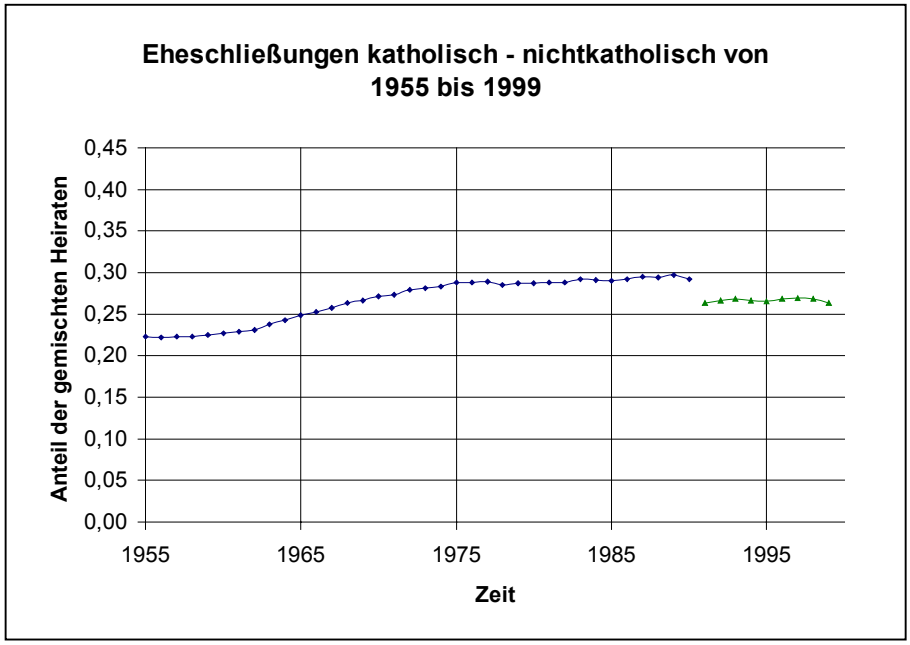


Abbildung 43: Die Heiratsraten zwischen Katholiken und Nichtkatholiken in den alten Bundesländern und in Deutschland sind hier über der Zeit aufgetragen.

Warum bleibt im binären System die Heiratshäufigkeit von 1991 bis 1999 ungefähr konstant? Die Heiratshäufigkeit setzt sich zusammen aus den Heiraten von Katholiken mit Protestanten *und* Katholiken mit Sonstigen. Für diese beiden Systeme betrachte man den zeitlichen Verlauf der gemischten Eheschließungen (Abbildung C.6 und C.7 in Anhang C). Diese Werte sind nun *nicht* normiert. Man erkennt, dass die Eheschließungen zwischen Katholiken und Protestanten abnimmt, während die Eheschließungen zwischen Katholiken und Sonstigen zunehmen. Beide zusammengenommen ergeben annähernd einen konstanten Kurvenverlauf.

Die zeitliche Entwicklung der Eheschließungen zwischen Katholiken und Nichtkatholiken verdeutlicht noch einmal die Abbildung 43. Der Anstieg der Eheschließungen lässt sich aus dieser Abbildung genauer ablesen. Ab 1975 ist die Anzahl der Hochzeiten nur sehr geringfügig angestiegen, ab 1991 zurückgegangen und schließlich unveränderlich geblieben.

Zeitunabhängige Eheschließungen

Im Folgenden sollen die Eheschließungen zwischen Katholiken und Nichtkatholiken für zwei verschiedene Jahre betrachtet werden:

a) im Jahr 1993 in den 10 alten Bundesländern ohne West-Berlin

b) im Jahr 1999 in Deutschland.

Beide Diagramme können in Analogie zum Gold-Platin-Diagramm gesehen werden.

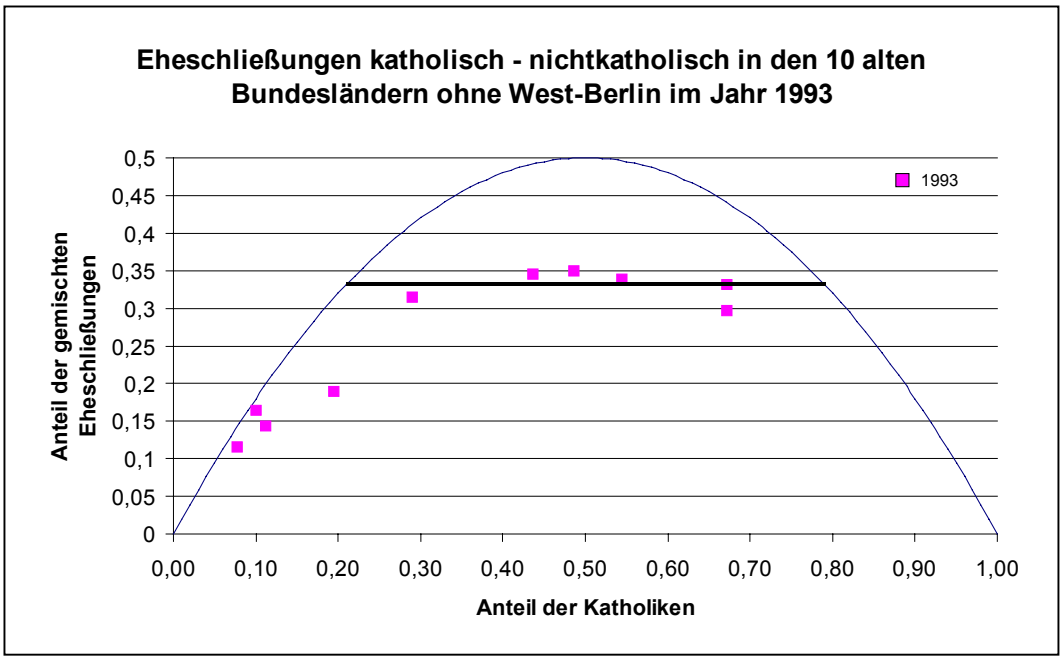


Abbildung 44: Anteil der Heiraten zwischen Katholiken und Nichtkatholiken in Deutschland 1993. Die Gerade gibt den Durchschnittswert der Heiraten über 30 % sowie Bayern (29,6 %) an; er liegt bei 33,4 %.

1993: Für einen geringen prozentualen Anteil an Katholiken (hier: kleiner als 20 %) befinden sich die zugehörigen y-Werte in der Nähe der idealen Kurve. Diese Katholiken sind also integriert, fast jeder Katholik hat einen nichtkatholischen Ehepartner. Dies ist vor allem in den nördlichen Bundesländern Deutschlands der Fall: in Bremen und Hamburg, wo auf Grund der kleinen Fläche wenige Katholiken vorhanden sind, sowie in Niedersachsen und Schleswig-Holstein.

Ist der Anteil der Katholiken dagegen größer als 20 %, so tritt Segregation ein. Die zugehörigen y-Werte liegen ungefähr auf einer Geraden. Zu einem bestimmten Zeitpunkt (hier: 1993) hat sich eine bestimmte "Temperatur" eingestellt: diese liegt bei 33,4 % Heiratshäufigkeit. Zur Ermittlung dieses Wertes wurde der Durchschnitt der y-Werte gebildet, die über 30 % liegen. Dieser Durchschnittswert ist unabhängig vom Anteil der Katholiken. Dies gilt sowohl für Bundesländer mit einem hohen Anteil an Katholiken wie Bayern und dem Saarland als auch für Länder mit einem niedrigen Anteil wie Hessen.

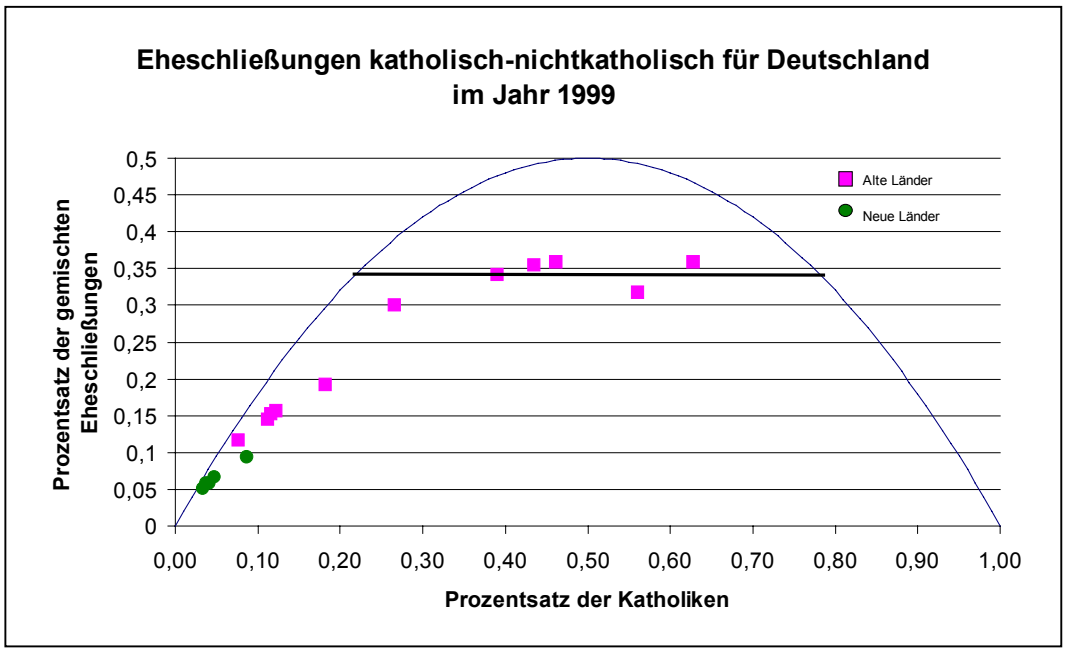


Abbildung 45: Anteil der Heiraten zwischen Katholiken und Nichtkatholiken in den alten Bundesländern ("Quadrate") und in den neuen Bundesländern ("Kreise") für 1999. Die Gerade gibt den Durchschnittswert der Heiraten über 30 % an; er liegt bei 33,9 %.

1999: Hinzugekommen sind die fünf neuen Bundesländer (und Berlin). Der Anteil der Katholiken in diesen Ländern ist sehr gering: die Werte liegen zwischen 5 % und 10 %. Die Datenpunkte liegen fast auf der idealen Kurve, woraus zu schließen ist, dass die Katholiken in diesen Ländern vollständig integriert sind. Weiterhin integriert sind die Katholiken in Berlin, Bremen und Hamburg sowie in Niedersachsen und Schleswig-Holstein.

Für die Bundesländer mit mehr als 20 % Anteil an Katholiken liegt Segregation vor. Man sollte davon ausgehen, dass in diesen Ländern nach sechs Jahren die Toleranz angestiegen ist. Genau das bestätigen auch die Daten, die ungefähr auf einer Linie liegen. Berechnet man für diese Länder den Durchschnittswert der Heiraten, so liegt dieser nun bei 33,9 %. Die Toleranz in Deutschland ist also um 0,5 % angestiegen.

5.4.3 Deutsche – Ausländer

Zeitabhängige Eheschließungen

Als nächstes soll die Integration von Ausländern in Deutschland diskutiert werden. Integration bedeutet, dass alle Zuwanderer gleichermaßen am gesellschaftlichen Leben beteiligt sind wie die einheimische Bevölkerung. Das bezieht sich ebenso auf die Bereiche Wirtschaft, Politik und Kultur. Damit Integration auf diesen Gebieten stattfindet, konzentriert sich die entsprechende Integrationspolitik auf den schulischen Bereich sowie auf die berufliche, die gesellschaftlich-kulturelle und die politisch-demokratische Integration (vgl. [24], Kapitel IV, 1).

Gerade in den letzten Jahren ist das Thema "Zuwanderung" zunehmend wichtiger geworden. Ein Grund dafür ist, dass die Bevölkerung in Industrieländern wie Deutschland einerseits altert, andererseits abnimmt. Immer mehr Menschen erreichen ein hohes Alter, während Geburten drastisch zurückgehen. Dies hat wiederum zufolge, dass auch der Anteil der potentiellen Eltern abnimmt. Folglich werden die Unternehmen weniger junge Arbeitskräfte einstellen können. Somit müssen ausländische Arbeitskräfte angeworben werden, um die Produktivität des Landes zu sichern (vgl. [24], Kapitel II).

Zuwanderung ist also sowohl wirtschaftlich als auch demografisch notwendig. Trotzdem stehen jedoch viele Menschen Ausländern immer noch mit Skepsis gegenüber, obwohl gerade das aufeinander Zugehen die Integration fördert. Dabei wird die Einbürgerung von Ausländern (und damit die Möglichkeit des Kontaktes und der Kommunikation) vor allem durch Kenntnis der deutschen Sprache erleichtert. Aber auch die Aufenthaltsdauer, die Straffreiheit und die finanzielle Unabhängigkeit garantieren eine schnellere und bessere Einbürgerung (vgl. [24], Kapitel II, 6.1). Weiterhin wirkt sich die Nutzung einheimischer Medien positiv auf den Integrationsprozess aus. Zum einen hilft es den Ausländern sich an die "neue" Sprache zu gewöhnen (z.B. die Benutzung deutsche Fernsehkanäle) , zum anderen erleichtern Medien den Zugang zu Informationen (vgl. [24], Kapitel IV, 5.7).

Das Verhältnis aus ausländischer und gesamter Bevölkerung ist ziemlich klein. Daher sollte man nach dem bisherigen Wissen über Phasendiagramme davon ausgehen können, dass die kleine Gruppe der Ausländer relativ gut integriert ist. Die Realität zeigt jedoch, dass rechtsradikale Anschläge immer wieder vereinzelt auftreten. Diese Anschläge finden vorwiegend in kleineren Gemeinden statt, obwohl dort die wenigen Ausländer eigentlich besser integriert sein müssten. Wie lässt sich dieser Widerspruch erklären?

Die Lösung ist aus Abbildung 18 auf 38 abzulesen. Wachsen die x-Werte von 0 % auf 2 % an, so steigen die y-Werte sehr stark an. Wachsen die x-Werte dagegen von 30 % auf 40 % an, so steigen die y-Werte nur schwach an.

Anders formuliert: Um einen sehr kleinen Anteil von Ausländern integrieren zu können, muss – relativ gesehen – sehr viel Toleranz aufgebracht werden. Gerade in ländlichen Gegenden,

wo "jeder jeden kennt" und einem häufiger begegnet, ist die Aufnahme "Andersartiger" mit Skepsis verbunden. Das ist in Großstädten anders, weil dort die Anonymität höher ist. Warum vor allem der Osten Deutschlands von Rechtsradikalismus überschattet wird, soll in Kapitel 5.6 geklärt werden. Besteht dagegen die Gesellschaft zu einem Drittel aus Ausländern, und sind diese vollständig integriert, so ist nur noch ein geringes Maß an Toleranz erforderlich, um weitere 10 % integrieren zu können.

Wie sieht nun das zeitabhängige Phasendiagramm für das binäre System Deutsche – Ausländer aus? Auf der x-Achse ist der Anteil der Ausländer, auf der y-Achse der Anteil der Eheschließungen zwischen Deutschen und Ausländern angegeben. Betrachtet werden nun die Eheschließungen nach der Staatsangehörigkeit der Ehepartner von 1980 bis 1990 in den alten Bundesländern und von 1991 bis 1999 in Deutschland. Nach Abbildung 46 und Abbildung 47 auf Seite 71 sollte man schließen, dass die Anzahl der gemischten Heiraten bis 1999 angestiegen sind. Vergrößert man jedoch beide Abbildungen und verbindet die Punkte durch eine Linie, so ist eine andere Tendenz zu erkennen. In beiden Fällen ist festzustellen, dass die Werte von 1991 an steigen, nach 1997 aber wieder zurückgehen. Der Versuch, eine Erklärung für diese Tatsache zu finden, wird in Kapitel 5.6 gemacht. Die Vergrößerung der Abbildungen sind in Anhang D zu sehen (Abbildung D.1 und Abbildung D.2).

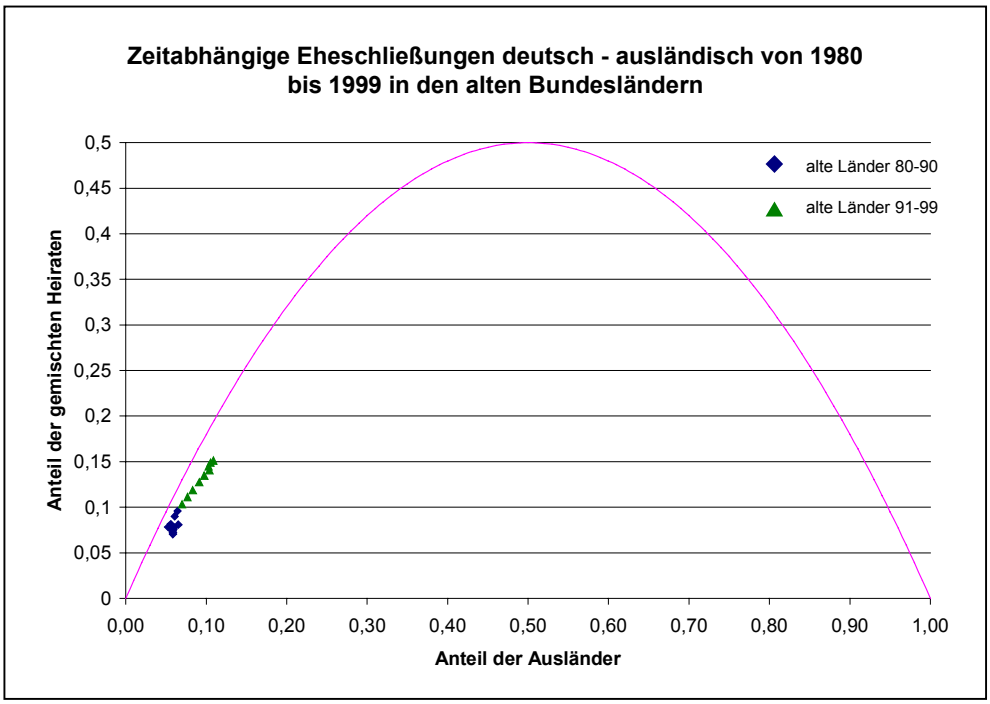


Abbildung 46: Anteil der Heiraten zwischen Deutschen und Ausländern in den alten Bundesländern von 1980 bis 1990 ("Rauten") und von 1991 bis 1999 ("Dreiecke"). Auf der x-Achse ist der Anteil der Ausländer dargestellt.

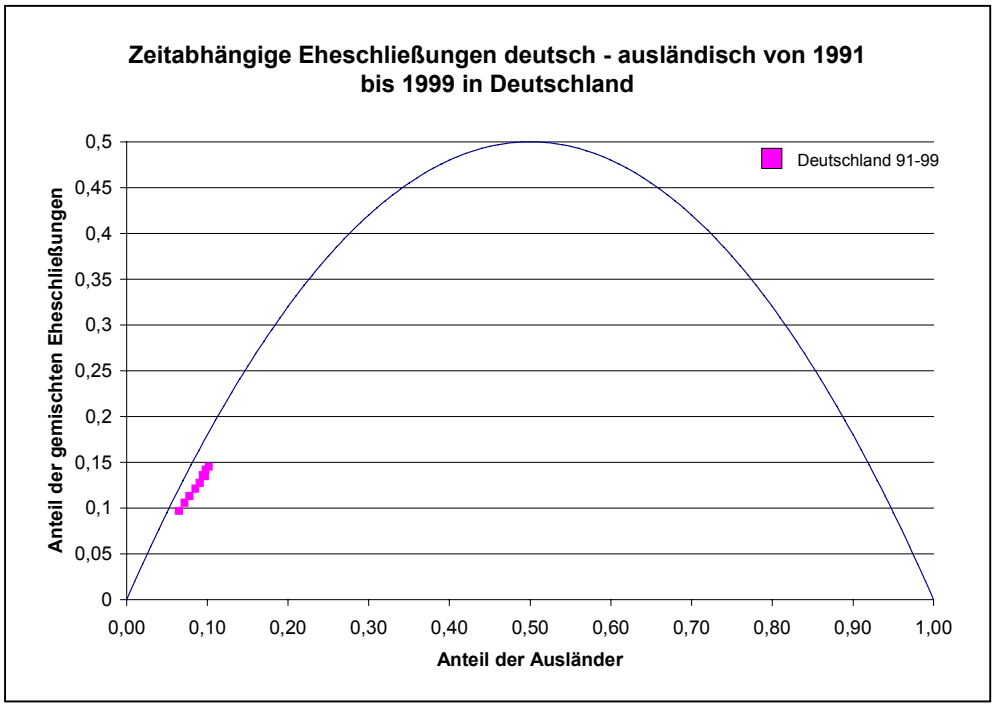


Abbildung 47: Anteil der Heiraten zwischen Deutschen und Ausländern in Deutschland von 1991 bis 1999.

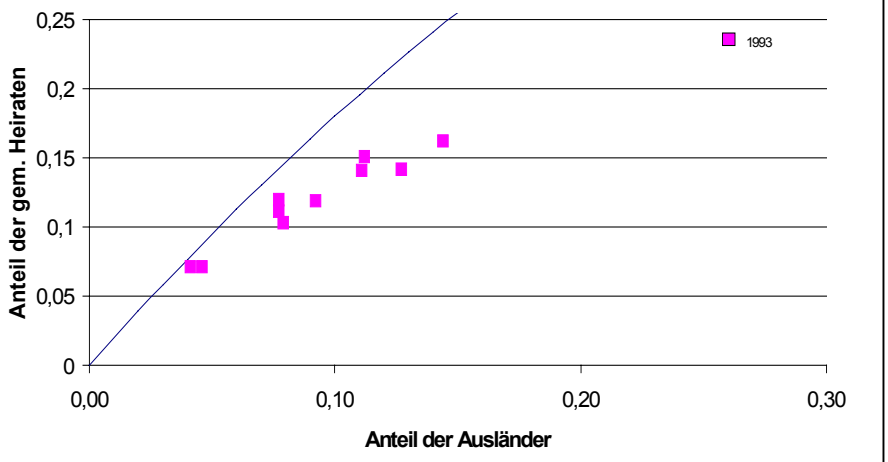
Zeitunabhängige Eheschließungen

Im Folgenden sollen die Eheschließungen zwischen Ausländern und Deutschen für zwei verschiedene Jahre betrachtet werden:

a) im Jahr 1993 in den 10 alten Bundesländern ohne West-Berlin

b) im Jahr 1999 in Deutschland.

Die Abbildungen sind vergrößert; die Abbildungen in normaler Größe entsprechen den Abbildungen D.3 und D.4 im Anhang D.



Baden-Württemberg: ...14,1 %
Bayern: .....11,9 %
Bremen: .....14,2 %
Hamburg:.....16,2 %
Hessen: .....15,1 %
Niedersachsen: ...7,1 %
Nordrhein-Westfalen: .....11,1 %
Rheinland-Pfalz: .....12,0 %
Saarland:.....10,3 %
Schleswig-Holstein: .....7,1 %

Abbildung 48: Anteil der Heiraten zwischen Deutschen und Ausländern in Deutschland 1993. Auf der x-Achse ist der Anteil der Ausländer dargestellt. Aus der nebenstehenden Tabelle geht hervor, welches Bundesland wie viele gemischte Heiraten in Prozent besitzt.

1993: Man erkennt, dass alle Punkte in der Nähe der idealen Kurve liegen. In allen Bundesländern sind die Ausländer relativ gut integriert. Vor allem Niedersachsen und Schleswig-Holstein liegen fast auf der Kurve. Das Bundesland mit den meisten Ausländern ist Hamburg (oberster Datenpunkt). Die Heiratshäufigkeit liegt bei 16,2 %.

1999: Hinzugekommen sind die fünf neuen Bundesländer sowie Berlin. Die neuen Bundesländer liegen auf der idealen Kurve – die Ausländer sind integriert. Dasselbe gilt für Berlin. Der Anteil der Ausländer ist in diesem Bundesland am höchsten, gefolgt von Hamburg. Innerhalb von sechs Jahren ist in *jedem* der alten Bundesländer die Heiratshäufigkeit gestiegen, wie man beiden Tabellen entnehmen kann. Lag bspw. die Heiratshäufigkeit von Hamburg 1993 noch bei 16,2 %, so liegt sie 1999 bei 20,2 %.

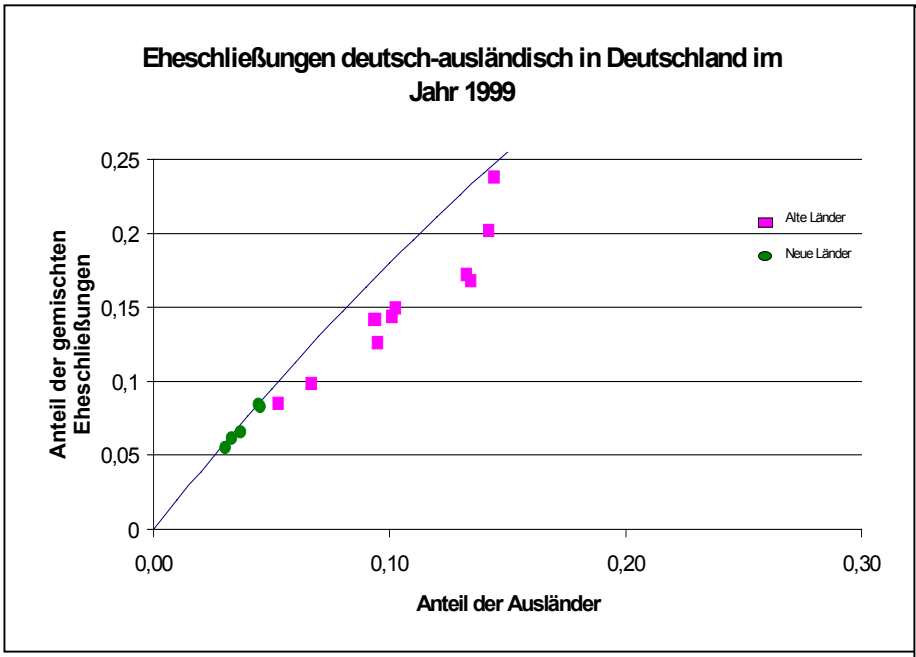


Abbildung 49: Anteil der Heiraten zwischen Deutschen und Ausländern in den alten Bundesländern ("Quadrate") und in den neuen Bundesländern ("Kreise") für 1999.

Baden-Württemberg: ... 16,8 %
Bayern: ..... 14,2 %
Berlin: ..... 23,8 %
Brandenburg: ..... 8,4 %
Bremen: ..... 15,0 %
Hamburg: ..... 20,2 %
Hessen: ..... 17,2 %
Mecklenburg-Vorpommern: ..... 5,5 %
Niedersachsen: ... 9,9 %
Nordrhein-Westfalen: ..... 14,4 %
Rheinland-Pfalz: ..... 14,2 %
Saarland: ..... 12,6 %
Sachsen: ..... 8,3 %
Sachsen-Anhalt: ..... 6,6 %
Schleswig-Holstein: ..... 8,5 %
Thüringen: ..... 6,1 %

Die Integration von ausländischen Mitbürgern in Deutschland schreitet voran, die Toleranz nimmt zu.

5.4.4 Weiße, Schwarze, Sonstige

Betrachtet werden die gemischten Eheschließungen in den USA 1988. Dabei wurden die Daten von nur 33 Staaten der USA ausgewertet.

Die binären Systeme sind Weiße – Nichtweiße, Schwarze – Nichtschwarze, Sonstige – Restliche. Dabei meint der Begriff "Sonstige" die überwiegend spanischen Bürger. "Restliche" sind in diesem Fall alle Personen außer die spanischen Bürger.

Abbildung 50 zeigt die Eheschließungen zwischen Sonstigen und den Restlichen. Wie man sieht, liegen alle Datenpunkte sehr dicht an der idealen Kurve. Der Anteil der Sonstigen liegt in allen Staaten unter 5 %. Ausnahmen bilden Alaska und Hawaii. Da diese Staaten "außerhalb" liegen, sind sie für die "Mischung" nicht relevant und müssten gesondert betrachtet werden.

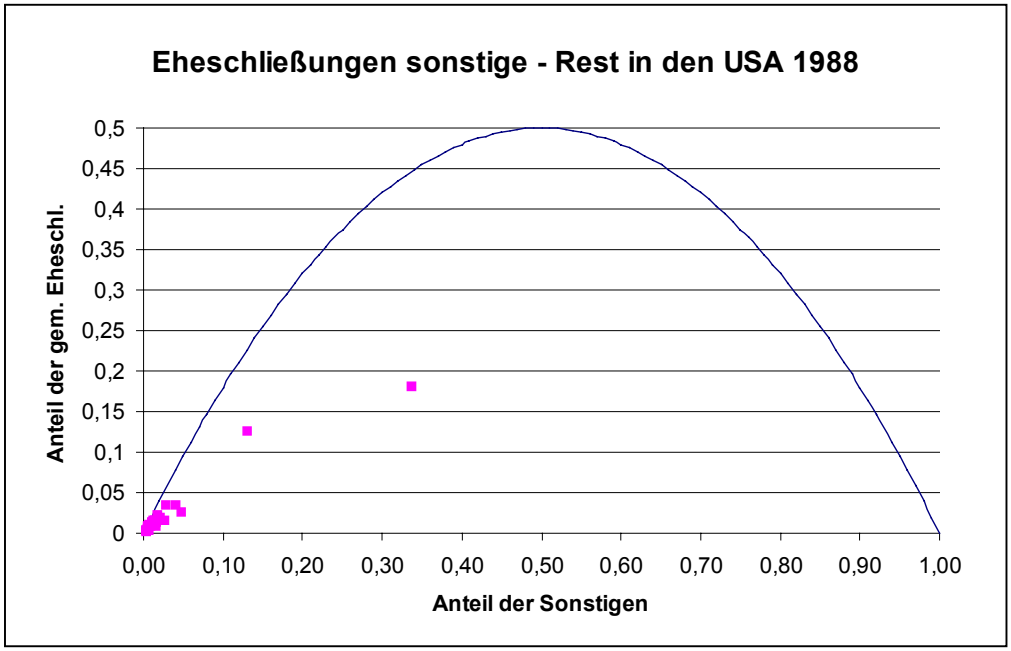


Abbildung 50: Anteil der Heiraten zwischen Sonstigen und Restlichen in den USA im Jahr 1988. Auf der x-Achse ist der Anteil der Sonstigen dargestellt.

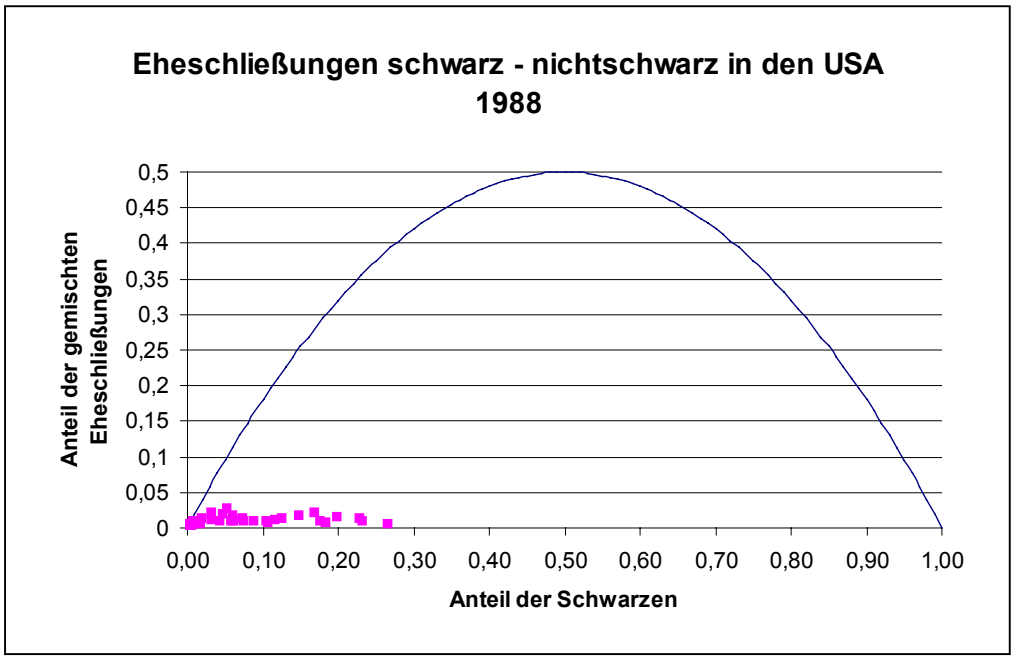


Abbildung 51: Anteil der Heiraten zwischen Schwarzen und Nichtschwarzen in den USA im Jahr 1988. Auf der x-Achse ist der Anteil der Schwarzen dargestellt.

Abbildung 51 zeigt die Eheschließungen zwischen Schwarzen und Nichtschwarzen. Wie man sieht, liegen alle Datenpunkte annähernd auf einer Geraden. Es bietet sich an, dieses Diagramm zu vergrößern (folgende Abbildung).

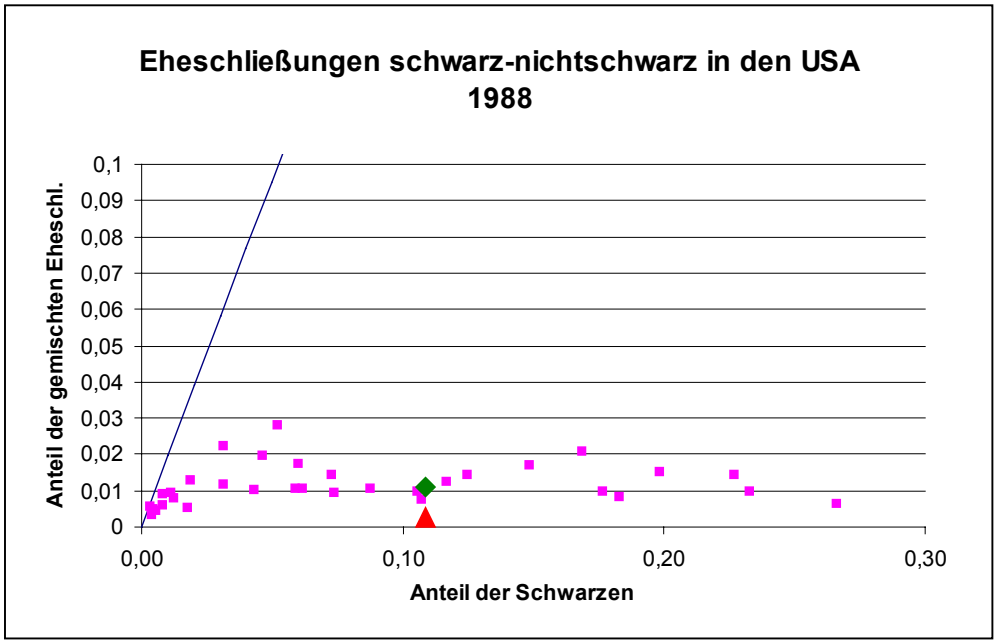


Abbildung 52: Anteil der Heiraten zwischen Schwarzen und Nichtschwarzen in den USA im Jahr 1988. Auf der x-Achse ist der Anteil der Schwarzen dargestellt. An der Stelle x = 0,109 sind zwei weitere Punkte eingezeichnet. Der Punkt "Raute" entspricht dem Durchschnittswert der gemischten Ehen im Jahr 1988; analog der Punkt "Dreieck" bezogen auf das Jahr 1970.

Für 1988 hat sich in den USA gegenüber der schwarzen Bevölkerung ein bestimmter Toleranzwert eingestellt. Die Datenpunkte mit $x < 1{,}2\ \%$ befinden sich sehr dicht an der idealen Kurve – die Menschen in diesen Staaten sind integriert. Für $x > 1{,}2\ \%$ tritt Segregation auf. Der Wert für die Toleranz lässt sich dadurch ermitteln, indem der Durchschnittswert aller gemischter Ehen gebildet wird: er beträgt 1,09 % ("Raute") und ist unabhängig vom Anteil der Schwarzen. Ferner ist der Durchschnittswert für 1970 eingezeichnet ("Dreieck"): er liegt bei 0,28 %. Die Toleranz ist also innerhalb von 18 Jahren um das Vierfache angestiegen. Abbildung E.1 in Anhang E zeigt noch einmal separat die beiden Durchschnittswerte für 1970 und 1988.

In Anhang E (Abbildungen E.2 – E.5) ist das Heiratsdiagramm für Weiße und Nichtweiße in den USA 1988 zu sehen. Bis auf Alaska und Hawaii streuen die Heiratsdaten um einen Durchschnittswert. Dieser liegt bei 2,3 % und ist in Abbildung 53 durch eine Gerade deutlich gemacht.

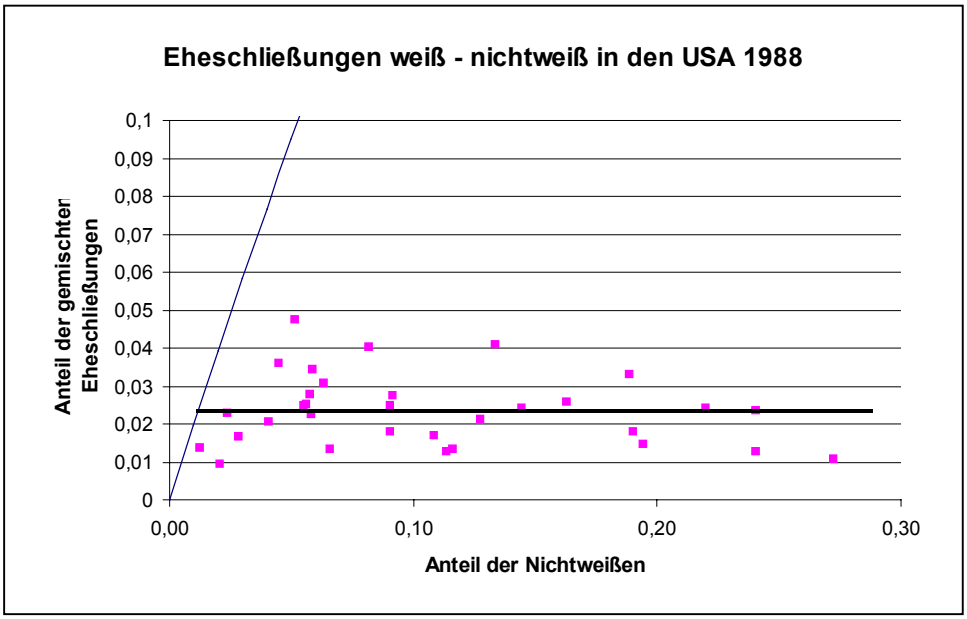


Abbildung 53: Die waagerechte Linie gibt den Durchschnittswert der Eheschließungen aller Staaten (außer Alaska und Hawaii) an; er liegt bei etwa 2,3 %.

5.5 Die Scheidungsrate als Leerstellen der Gesellschaften

a) Wie bereits erwähnt ist die Heiratshäufigkeit zwischen Ausländern und Deutschen ein Maß für die Toleranz in einer Gesellschaft. Sie gibt an, inwieweit die Ausländer integriert sind (vgl. Kapitel 5.2.4 "Bedeutung von T in der Gesellschaft" auf Seite 55).

b) Es existiert eine weitere Methode, um die Toleranz einer Gesellschaft zu bestimmen. Das binäre System besteht nun aus der Gruppe der Frauen und aus der Gruppe der Männer. Die Anordnung der Gruppenmitglieder ist geordnet gemischt, d.h. es liegen geschlossene Ehen vor. Eine "Leerstelle" in einer solchen Anordnung entspricht dann einer Ehescheidung.

Ist N die Anzahl aller Ehepartner, N_V die Anzahl der geschiedenen Personen, E die Bindungsstärke und T die Toleranz, so liefert die Boltzmann-Verteilung den schon aus der Physik bekannten Zusammenhang

$$\frac{N_V}{N} = e^{-\frac{E}{T}} \tag{21}$$

Der Faktor p_V der e-Funktion fällt für unendliche Systeme weg; Gesellschaften bestehen bekanntlich aus einer sehr großen Anzahl von Personen. Wie man in Abbildung 54 sieht,

existieren hier zwei unterschiedliche Arten von Leerstellen, so dass man eigentlich zwischen E_{Frau} und E_{Mann} unterscheiden muss.

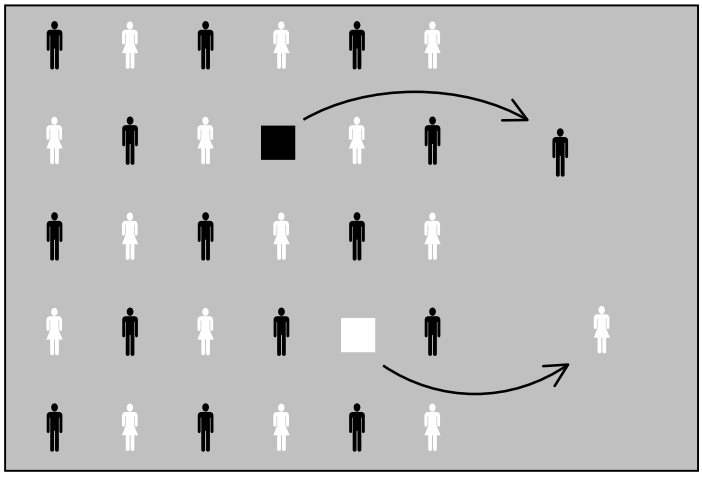


Abbildung 54: "Leerstellen" entsprechen in der Gesellschaft den Ehescheidungen. Aufgrund der unterschiedlichen Bindungsstärke zwischen Mann und Frau ist auch die Zahl der Leerstellen unterschiedlich.

Es ist anzunehmen, dass die Bindung der Frau an den Mann stärker ist als umgekehrt. Dann würde es mehr "männliche Leerstellen" geben als weibliche. Man müsste demzufolge anhand von statistischen Daten ermitteln, wieviel geschiedene Frauen und Männer wieder geheiratet haben. Auf diese detaillierte Analyse wurde hier verzichtet, die vorliegenden Ergebnisse sind für die Erstellung der Graphen und deren Interpretation ausreichend.

Ist N_{gP} die Anzahl der geschiedenen Ehepaare, und ist die Anzahl der geschiedenen Frauen N_{FV} ungefähr gleich der Anzahl der geschiedenen Männer N_{MV}, dann gilt

$$\frac{N_{gP}}{2 \cdot N} = \frac{N_{FV} + N_{MV}}{2 \cdot N} \approx \frac{2 \cdot N_V}{2 \cdot N} = \frac{N_V}{N}$$

Es folgen zwei weitere Graphen zur allgemeinen Scheidungsrate:

Abbildung 55: Die Scheidungsrate von 1980 bis 1989 war in den neuen Bundesländern höher als in den alten Ländern: die Scheidungen je 10.000 Einwohner lagen bei 30, in den alten Ländern bei ungefähr 20. Die Arbeitslosigkeit war vor der Wende im Osten sehr gering; Ware war billig, dafür aber auch minderwertig. Zum Zeitpunkt der Maueröffnung hat dann die allgemeine Scheidungsrate in den neuen Ländern rapide abgenommen. Man sieht den starken Einbruch von 1989 über 1990 bis 1991. Zu diesem Zeitpunkt waren es ungefähr sechs (!) Scheidungen je 10.000 Einwohner. Die Menschen waren unsicher, was auf sie zukommen und welche Veränderungen die Zukunft mit sich bringen würde, so dass man es für besser hielt zusammen zu bleiben. Von 1991 an hat sich der Verlauf der Graphen stark geändert: der Graph für die neuen Länder liegt nun *unter* dem Graph für die alten Länder. Die Scheidungsrate ist jedoch wieder gestiegen, besonders von 1992 bis 1994. Zu diesem

Zeitpunkt betrugen die Scheidungen je 10.000 Einwohner 15, vier Jahre später 19. Die Tendenz ist weiterhin steigend. Dabei ist die Steigung größer als in den alten Ländern. Seit 1992 steigen die Werte auch dort wieder kontinuierlich an.

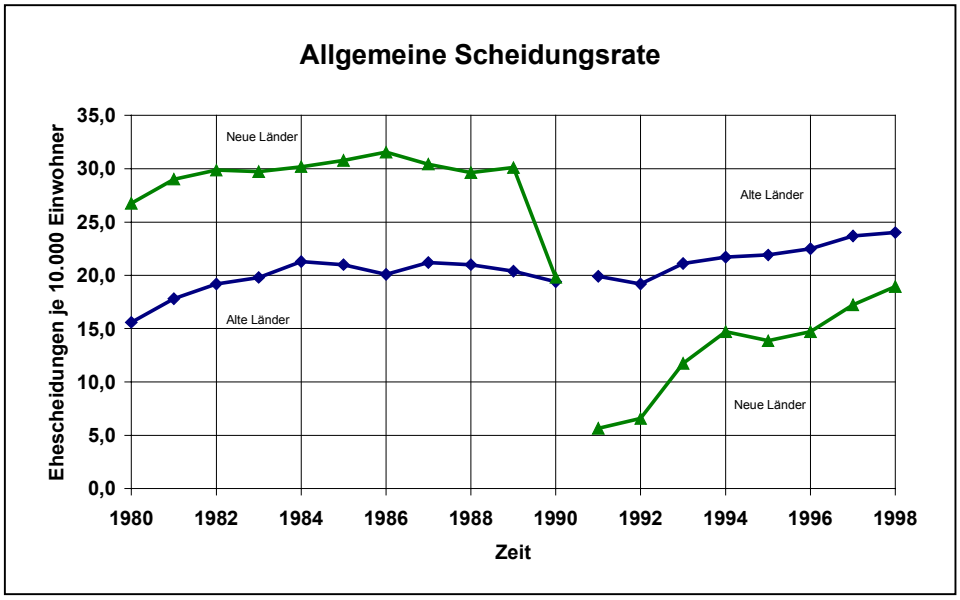


Abbildung 55: Dargestellt sind die Ehescheidungen je 10.000 Einwohner in den alten und neuen Bundesländern gegenüber der Zeit (1980 bis 1998).

Abbildung 56: Dargestellt ist der gesamte Verlauf der allgemeinen Scheidungsrate von 1980 bis 1998 in Deutschland: von 1980 bis 1990 in den alten Ländern, von 1991 bis 1998 in Gesamtdeutschland. Seit 1992 ist der stetige Anstieg zu beobachten.

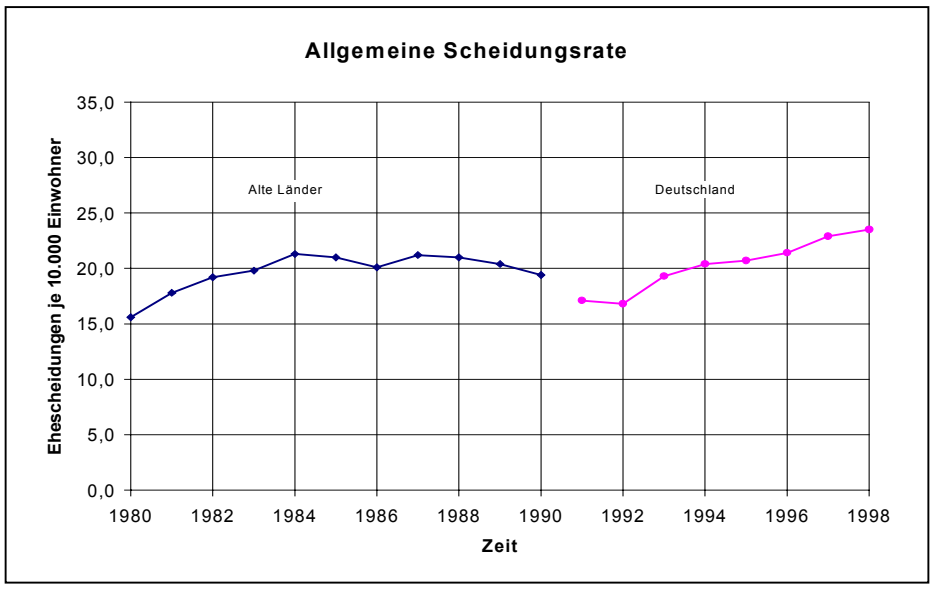


Abbildung 56: Ehescheidungen je 10.000 Einwohner von 1980 bis 1990 in den alten Bundesländern und von 1991 1998 in Deutschland.

5.6 Beispiele für die Messung der sozialen Temperatur

Beide Methoden a) und b) aus Kapitel 5.5 zur Bestimmung der Toleranz sind unabhängig voneinander. Es existiert jedoch noch eine dritte Methode, die eine weitere Größe benötigt: das aus Kapitel 5.1.1 "Die drei Staatsformen" erwähnte Bruttoinlandsprodukt (BIP). In diesem Kapitel wurde angedeutet, dass der Lagrange-Parameter in der Ökonomie dem Lebensstandard entspricht. Daher ist zu vermuten, dass die Toleranz (aus dem Bereich Gesellschaft) und der Lebensstandard (aus dem Bereich Ökonomie) parallel verlaufen. Abbildung 57 bestätigt diese Vermutung. Man sieht den gleichartigen Verlauf von Toleranz und BIP von 1991 bis 1999 in Deutschland.

Allgemeine Scheidungsrate, gemischte Eheschließungen P und Bruttoinlandsprodukt sind also eng miteinander verbunden. Alle drei Graphen und ihr ähnlicher Verlauf sind in Abbildung 58 zu sehen. Gesellschaft und Wirtschaft lassen sich nicht ohne weiteres trennen, sondern gehören zusammen. In Ländern, wo der Lebensstandard hoch und dementsprechend die Staatsform weniger hierarchisch ist, können Eingeborene und Ausländer eher aufeinander zugehen. Man ist finanziell unabhängig, so dass man seine eigenen Wege gehen kann und nicht auf andere Personen angewiesen ist. Die Zahl der Ehescheidungen nimmt also zu.

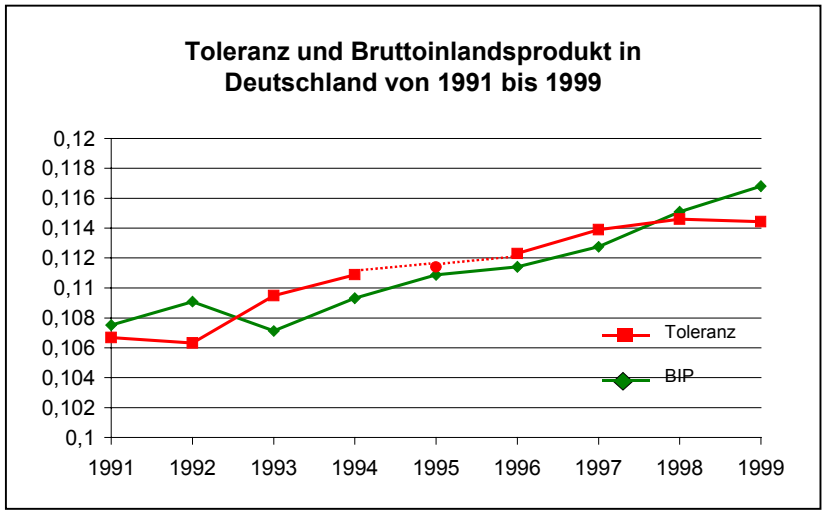


Abbildung 57: Der Verlauf der Toleranz ("Quadrate") sowie des BIP ("Rauten") in Deutschland ist hier über der Zeit (1991 bis 1999) aufgetragen. Die Werte für die Toleranz hängen von der Zahl der Ehescheidungen und der bestehenden Ehen ab. Toleranz- und BIP-Werte[11] wurden zwecks Vergleichs normiert. Da der Wert der bestehenden Ehen für 1995 nicht vorhanden war, wurde er aus den beiden Werten für 1994 und 1996 "gemittelt". Die Verbindung zu den beiden real existierenden Werten ist daher gestrichelt eingezeichnet.

[11] Die BIP-Werte wurden entnommen aus [3], Kapitel 3.2.

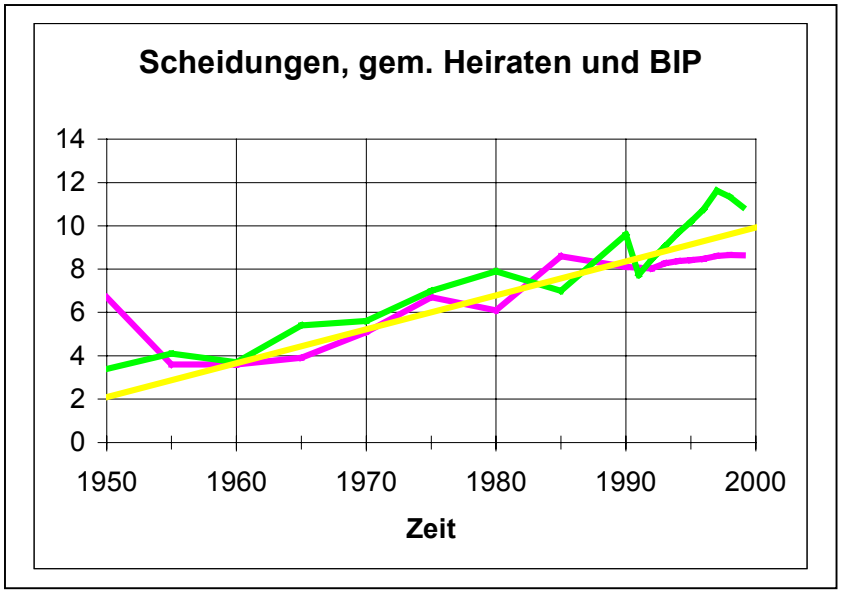


Abbildung 58: Allgemeine Scheidungsrate (Grau-80%), gemischte Heiraten (Grau-50%) und BIP (Grau-25%) in den alten Bundesländern (1950-1990) und in Deutschland (1991-1999).

In den ersten Jahren nach der Wende kam es in den neuen Bundesländern zu heftigen rechtsradikalen Anschlägen: Hoyerswerda im September 1991 und Rostock-Lichtenhagen im August 1992. Zu dieser Zeit war der Lebensstandard in den neuen Bundesländern sehr niedrig und damit auch die Toleranz. Aber auch in den alten Bundesländern war von Anschlägen zu hören: Mölln im November 1992 und Solingen im Mai 1993. Insgesamt hatte sich die Zahl der Straftaten 1991 gegenüber 1990 um das Zehnfache erhöht und lag bei 3884. In den folgenden zwei Jahren erhöhte sich die Zahl der Straftaten jeweils um ungefähr 3000, so dass 1993 die Zahl bereits bei 10561 lag. Seitdem sind die Werte wieder gesunken, während zeitgleich der Lebensstandard in Deutschland gestiegen ist. Dies ist bis 1998 zu beobachten [3]. Seit 1999 ist die Zahl der rechtsradikalen Straftaten jedoch wieder angestiegen. Das legt die Vermutung nahe, dass ebenfalls seit 1999 der Lebensstandard wieder gesunken ist. Dies müsste anhand geeigneter Daten überprüft werden.

6 Zusammenfassung

Ziel dieser Arbeit ist die Darstellung der *Äquivalenz* zwischen Thermodynamik und Soziodynamik.

Theoretisch gesehen ist diese Äquivalenz vorhanden. Die physikalische Theorie wurde in Kapitel 4 ausführlich für ein physikalisches System dargestellt und konnte problemlos auf ein gesellschaftliches System übertragen werden, wie es in Kapitel 5 geschehen ist.

In dieser Staatsexamensarbeit wurde gezeigt, dass diese Äquivalenz nicht nur theoretisch, sondern auch experimentell gezeigt werden kann. Zu diesem Zweck wurden Phasendiagramme benutzt, wie man sie aus der Physik kennt. Statt physikalischer Daten wurden gesellschaftliche Daten verwendet.

Zunächst wurden konfessionell gemischte Eheschließungen in den alten Bundesländern von 1955 bis 1990 und von 1991 bis 1999 in alten und neuen Bundesländern untersucht. Es ergab sich, dass die Toleranz für gemischte Heiraten im Laufe der Jahre zugenommen hat. Gerade die Integration von Katholiken ist von 1991 bis 1999 sehr stark angestiegen. Gleichzeitig ist der Anteil der Katholiken und Protestanten mit der Zeit kontinuierlich zurückgegangen, während der Anteil der Menschen mit anderer Religionszugehörigkeit angewachsen ist. Als Gründe dafür lassen sich Kirchenaustritte und Migration anführen.

Weiterhin wurde die Integration von Ausländern in den alten Bundesländern von 1980 bis 1990 und von 1991 bis 1999 in alten und neuen Bundesländern betrachtet. Es ergab sich, dass seit 1980 die Integration stetig zunahm. Bei der Untersuchung der Werte für die einzelnen Bundesländer für 1993 und 1999 stellte sich heraus, dass vor allem in kleinen Bundesländern die Toleranz sehr groß ist, da nur ein kleiner Prozentsatz an Ausländern integriert werden muss. Aber auch für Gesamtdeutschland lässt sich aus den steigenden Zahlen für gemischte Eheschließungen ein Anwachsen der Toleranz beobachten.

Außerdem bestätigten die Daten für die Toleranz und BIP, dass Toleranz und Lebensstandard parallel verlaufen. Damit konnte erklärt werden, warum gerade in den ersten Jahren nach der Maueröffnung die Anzahl von rechtsradikalen Anschlägen drastisch gestiegen ist.

Als Letztes wurde die Integration der schwarzen Bevölkerung in den USA in den Jahren 1970 und 1988 analysiert. Daraus ging hervor, dass die Akzeptanz der Schwarzen nach achtzehn Jahren um das Vierfache angestiegen ist.

Fazit ist, dass vor allem kleinere Gruppen besser integriert werden können als große Gruppen. Um die Integration von Ausländern zu fördern, muss entweder die Toleranz erhöht oder die Abneigung gegenüber der fremden Gruppe verringert werden. Die Toleranz verläuft parallel zum Lebensstandard, der wiederum von der Politik in einem Staat abhängig ist. Davon hängt schließlich ab, ob Frieden oder Krieg im Lande herrschen.

7 Anhang

7.1 Anhang A (Boltzmann-Verteilung)

Herleitung der Boltzmann-Verteilung $\frac{N_i}{N} = p_i \cdot e^{-\frac{E_i}{k_B \cdot T}}$

Teil a) Herleitung des Ausdrucks für ln(W(Ni)) (vgl. [19], S. 927):

$$W(N_i) = \frac{N!}{\prod_{i=1}^{K} N_i!} \cdot \prod_{i=1}^{K} p_i^{N_i} \quad , i = 1, 2, \ldots, K$$

Unter Berücksichtigung der Logarithmenregeln erhält man:

$$\ln(W(N_i)) = \ln(N!) - \ln\left(\prod_{i=1}^{K} N_i!\right) + \ln\left(\prod_{i=1}^{K} p_i^{N_i}\right)$$

$$= \ln(N!) - \sum_{i=1}^{K} \ln(N_i!) + \sum_{i=1}^{K} \ln(p_i^{N_i})$$

Mit der (unvollständigen) Stirling-Formel ln(N!) = N ln(N) – N ergibt sich:

$$\ln(W(N_i)) = N \ln(N) - N - \sum_{i=1}^{K} \left(N_i \ln(N_i) - N_i\right) + \sum_{i=1}^{K} N_i \ln(p_i)$$

$$= N \ln(N) - N - \sum_{i=1}^{K} N_i \ln(N_i) + N + \sum_{i=1}^{K} N_i \ln(p_i)$$

$$\ln(W(N_i)) = N \ln(N) - \sum_{i=1}^{K} N_i \ln(N_i) + \sum_{i=1}^{K} N_i \ln(p_i)$$

Teil b) Mit a) und Gleichgewichtsbedingung kann nun die Verteilung hergeleitet werden (vgl. [12], S. 18):

Wird $E = E_0 + E_i \cdot N_i + \varepsilon_{ij} \cdot N_i \cdot N_j$ und der oben berechnete Ausdruck für $\ln(W(N_i))$ in $L = E + T \cdot S \rightarrow$ Max! eingesetzt, so erhält man

$$L = E_0 + E_i N_i + \varepsilon_{ij} N_i N_j + T \cdot \left\{ \left(\sum_{i=1}^{K} N_i \right) \cdot \ln \left(\sum_{i=1}^{K} N_i \right) - \sum_{i=1}^{K} N_i \ln(N_i) + \sum_{i=1}^{K} N_i \ln(p_i) \right\} \rightarrow \text{Max!}$$

N wurde hier durch $\sum_{i=1}^{K} N_i$ ersetzt, was das Verständnis der folgenden Rechnung erleichtert.

Hat die Lagrange-Funktion ihren maximalen Wert erreicht, so befindet sie sich im Gleichgewicht. In diesem Fall ist die Ableitung von L nach N_g gleich Null. N_g stellt ein bestimmtes N_i-Glied dar $(g \in \{1, 2, ..., K\})$:

$$\frac{\partial L}{\partial N_g} = E_g + T \cdot \left\{ 1 \cdot \ln \left(\sum_{i=1}^{K} N_i \right) + \left(\sum_{i=1}^{K} N_i \right) \cdot \frac{1}{\sum_{i=1}^{K} N_i} \cdot 1 - \left(1 \cdot \ln(N_g) + N_g \cdot \frac{1}{N_g} \right) + \ln(p_g) \right\} \overset{!}{=} 0$$

Der Term $\varepsilon_{ij} \cdot N_i \cdot N_j$ wurde gleich Null gesetzt, da keine Wechselwirkungen betrachtet werden sollen.

Vereinfacht ergibt sich:

$$E_g + T \cdot (\ln(N) + 1 - \ln(N_g) - 1 + \ln(p_g)) = 0$$

Mit "-1" multipliziert, erhält man

$$-E_g - T \cdot (-\ln(N) + \ln(N_g) - \ln(p_g)) = 0$$

Durch Umformung ergibt sich

$$\ln \left(\frac{N_g}{N \cdot p_g} \right) = -\frac{E_g}{T}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{N_g}{N} = p_g \cdot e^{-\frac{E_g}{T}} \qquad (g \in \{1, 2, ..., K\})$$

Da man in der Physik mit $S = k_B \cdot \ln(W)$ rechnet, müsste man ebenfalls mit $L = E + T \cdot k_B \cdot \ln(W(N_i))$ rechnen. Dann steht die Boltzmann-Konstante k_B vor dem T:

$$\frac{N_i}{N} = p_i \cdot e^{-\frac{E_i}{k_B \cdot T}}$$

7.2 Anhang B (Konzentration x ist Ableitung)

Behauptung: Die Konzentration x ist die Ableitung einer Funktion.

Beweis:

Die freie Energie ist gegeben durch $F(x) = E(x) - T \cdot S(x)$. Dass sie auch von T abhängt, soll im Folgenden vernachlässigt werden.

Weiterhin benötigt man das chemische Potential μ. Es ist definiert[12] als $\frac{\partial F}{\partial x} = \mu$.

Es muss nun eine Funktion G konstruiert werden, die von x abhängt und deren 1. Ableitung x ergibt. Diese Funktion lautet

$$G(x) = N \cdot \left(F(x) - \mu \cdot x\right).$$

N ist dabei die Anzahl aller Teilchen. Differenziert man diese Funktion, so ergibt sich unter Berücksichtigung der Produktregel Folgendes

$$dG = N \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial x} \cdot dx - (\mu \cdot dx) - (x \cdot d\mu)\right)$$

$$= N \cdot \left(\ \mu\ \cdot dx - (\mu \cdot dx) - (x \cdot d\mu)\right).$$

Zwei Terme fallen weg, so dass nur noch übrigbleibt:

$$dG = -(N \cdot x \cdot d\mu).$$

Das ist äquivalent zu

$$x = -\left(\frac{dG}{d\mu} \cdot \frac{1}{N}\right). \qquad \text{q. e. d.}$$

[12] vgl. [1], Kapitel 10.9

7.3 Anhang C (Katholiken, Protestanten, Sonstige)

Weitere Graphen zu "Katholiken – Protestanten – Sonstige"

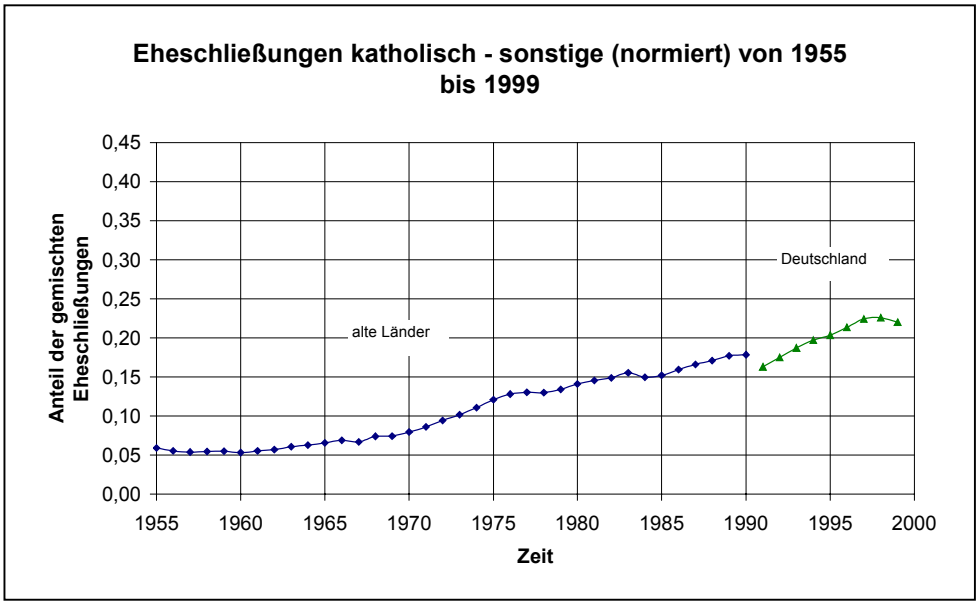


Abbildung C1: Der Anteil der Heiraten zwischen Katholiken und Sonstigen in den alten Bundesländern und in Deutschland ist hier über der Zeit aufgetragen.

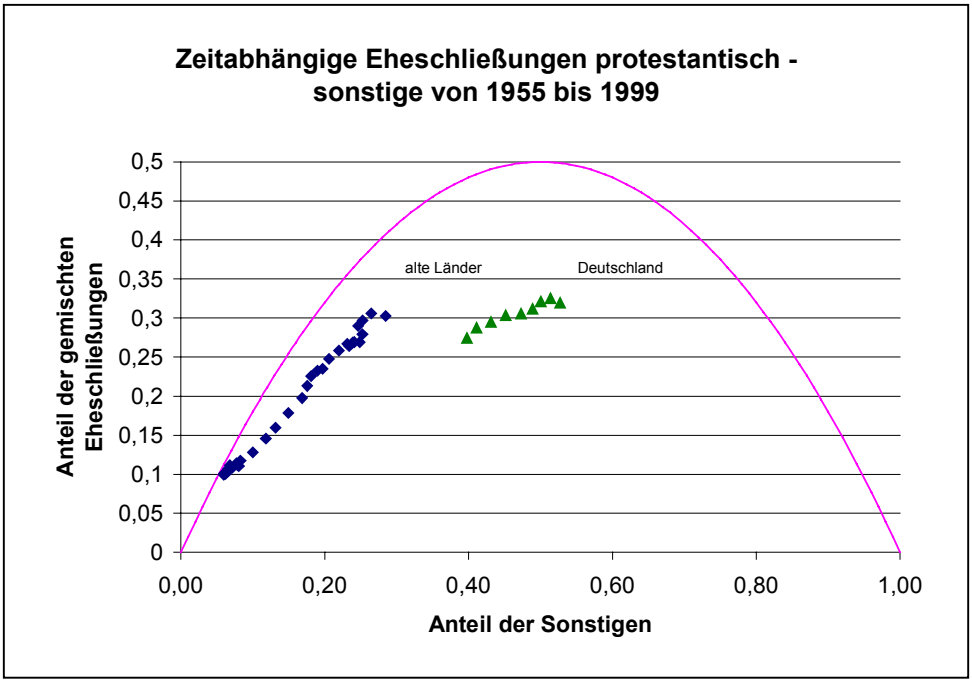


Abbildung C2: Anteil der Heiraten zwischen Protestanten und Sonstigen in den alten Bundesländern (1955-90) und in Deutschland (1991-99). Auf der x-Achse ist der Anteil der Sonstigen dargestellt.

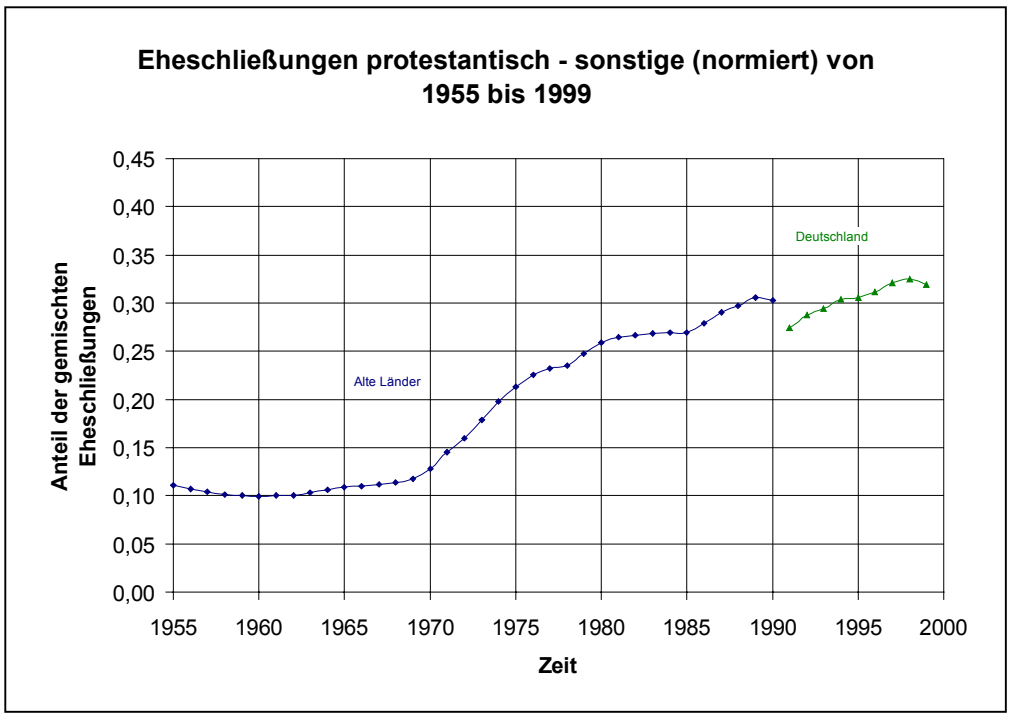


Abbildung C3: Der Anteil der Heiraten zwischen Protestanten und Sonstigen in den alten Bundesländern und in Deutschland ist hier über der Zeit aufgetragen.

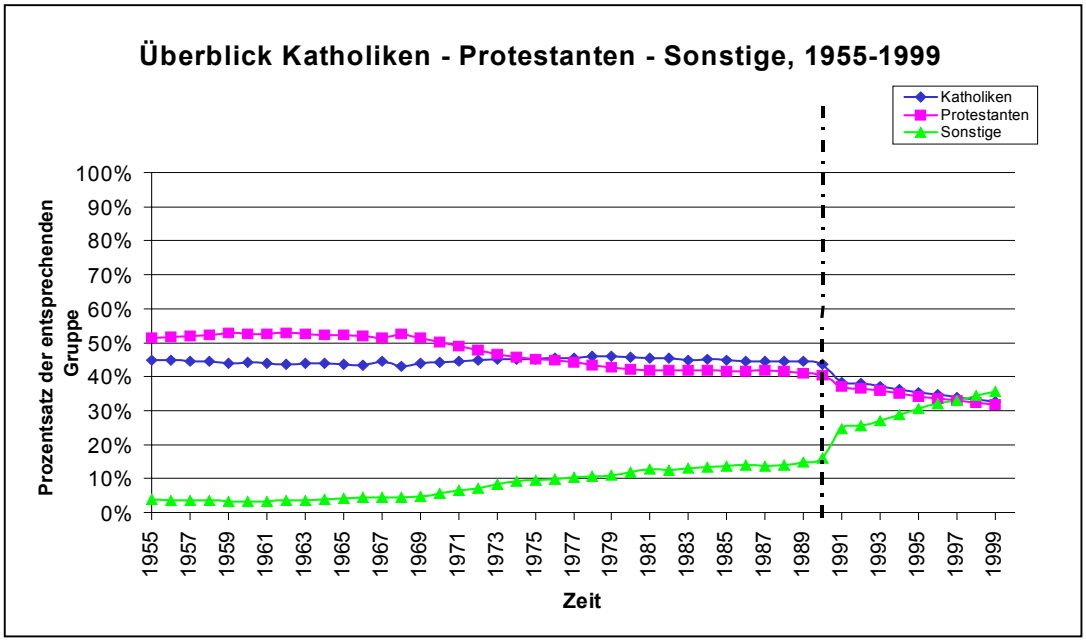


Abbildung C4: Der Prozentsatz der jeweiligen Gruppe (Katholiken –"Rauten", Protestanten – "Rechtecke", Sonstige – "Dreiecke") ist hier über der Zeit aufgetragen.

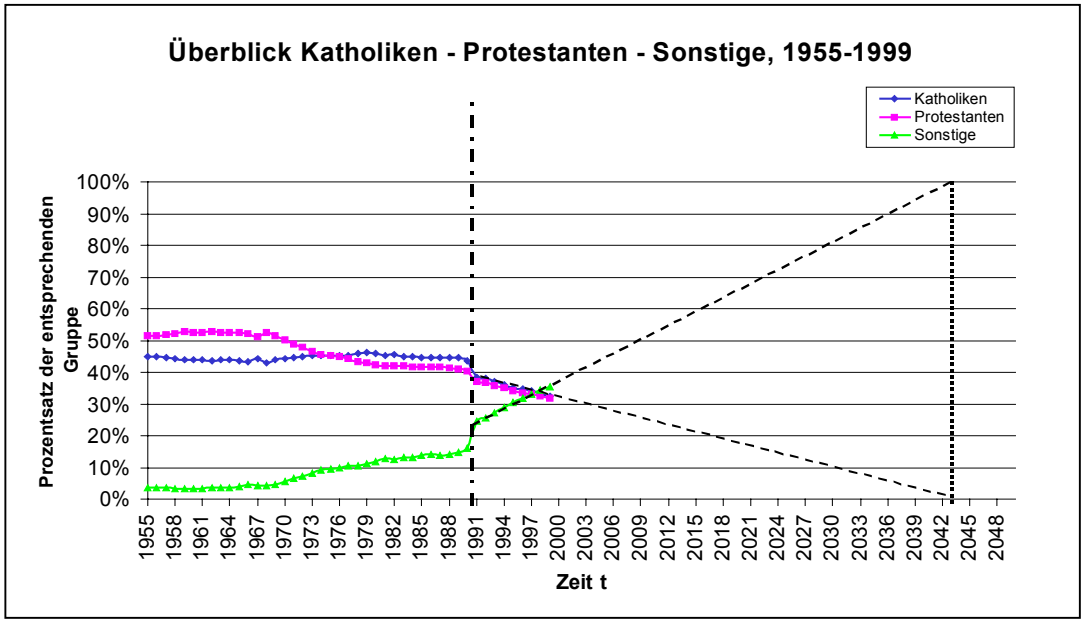


Abbildung C5: Für die Datenpunkte der Protestanten bzw. Katholiken und der Sonstigen wurde jeweils lineare Regression durchgeführt. Durch Extrapolation der Regressionsgeraden würde sich ergeben, dass ungefähr im Jahr 2043 der Anteil der Sonstigen auf 100 % angewachsen und der Anteil der Protestanten bzw. Katholiken auf Null Prozent zurückgegangen sein würde.

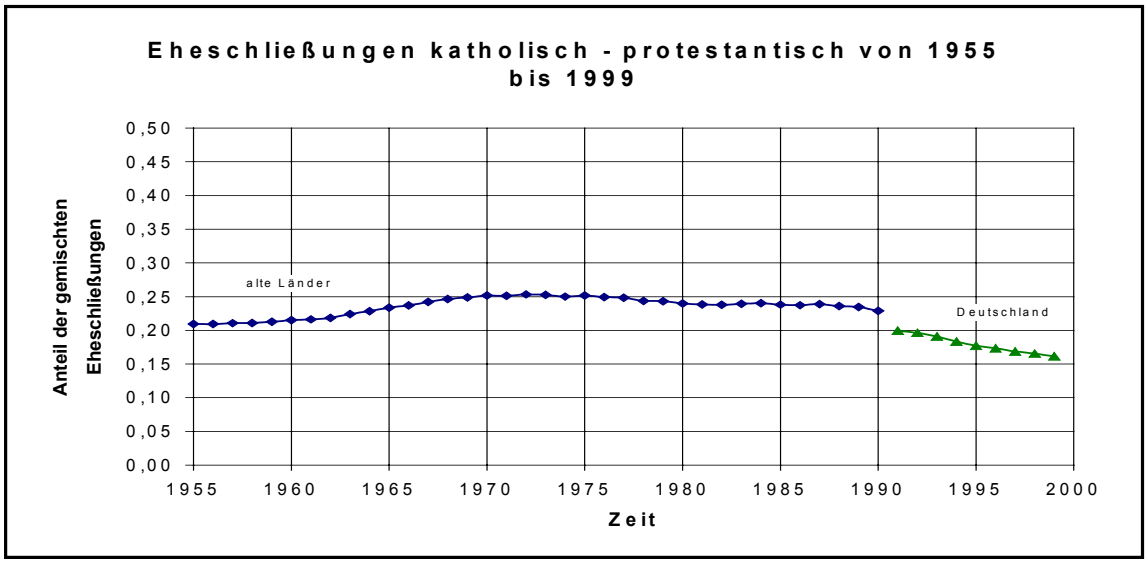


Abbildung C6: Die Eheschließungen katholisch – protestantisch sind über der Zeit aufgetragen.

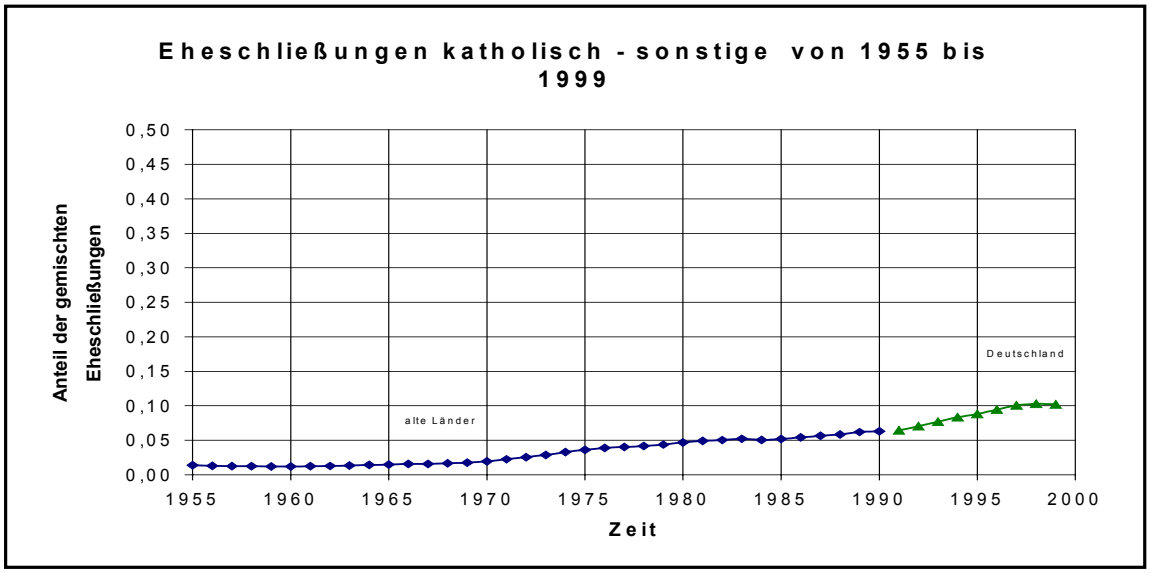


Abbildung C7: Die Eheschließungen katholisch – sonstige sind über der Zeit aufgetragen.

7.4 Anhang D (Deutsche – Ausländer)

Weitere Graphen zu "Deutsche – Ausländer"

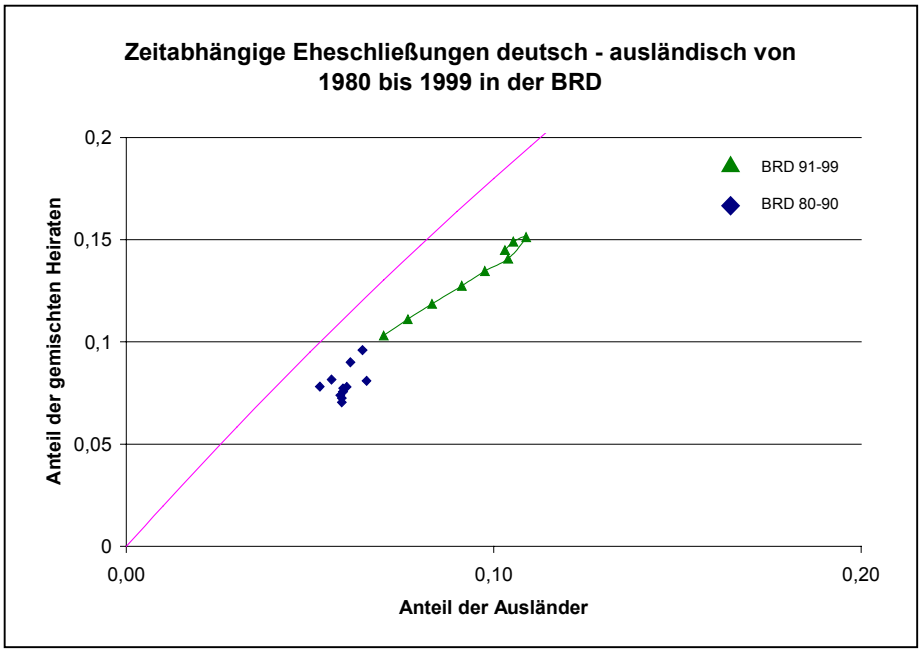


Abbildung D.1: Anteil der Heiraten zwischen Deutschen und Ausländern in den alten Bundesländern von 1980 bis 1990 ("Rauten") und von 1991 bis 1999 ("Dreiecke"). Auf der x-Achse ist der Anteil der Ausländer dargestellt

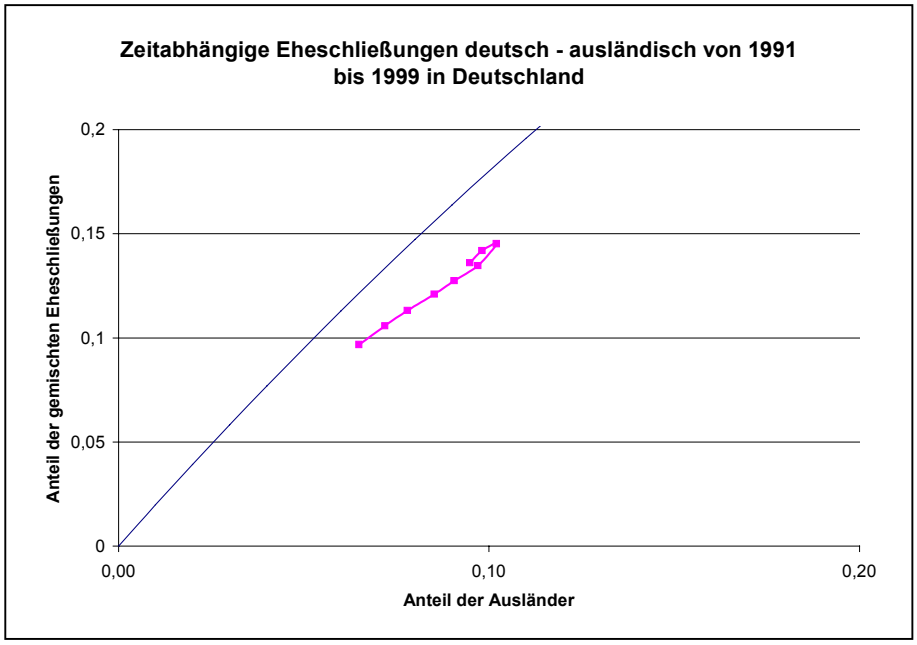


Abbildung D.2: Anteil der Heiraten zwischen Deutschen und Ausländern in Deutschland von 1991 bis 1999. Auf der x-Achse ist der Anteil der Ausländer dargestellt.

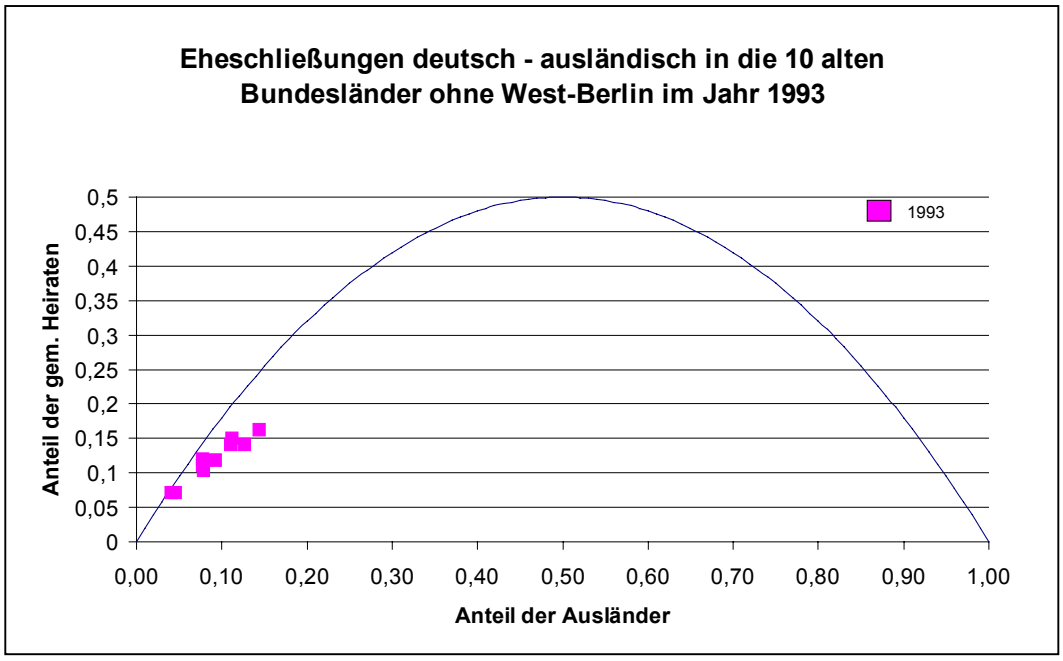


Abbildung D.3: Anteil der Heiraten zwischen Deutschen und Ausländern in Deutschland 1993. Auf der x-Achse ist der Anteil der Ausländer dargestellt.

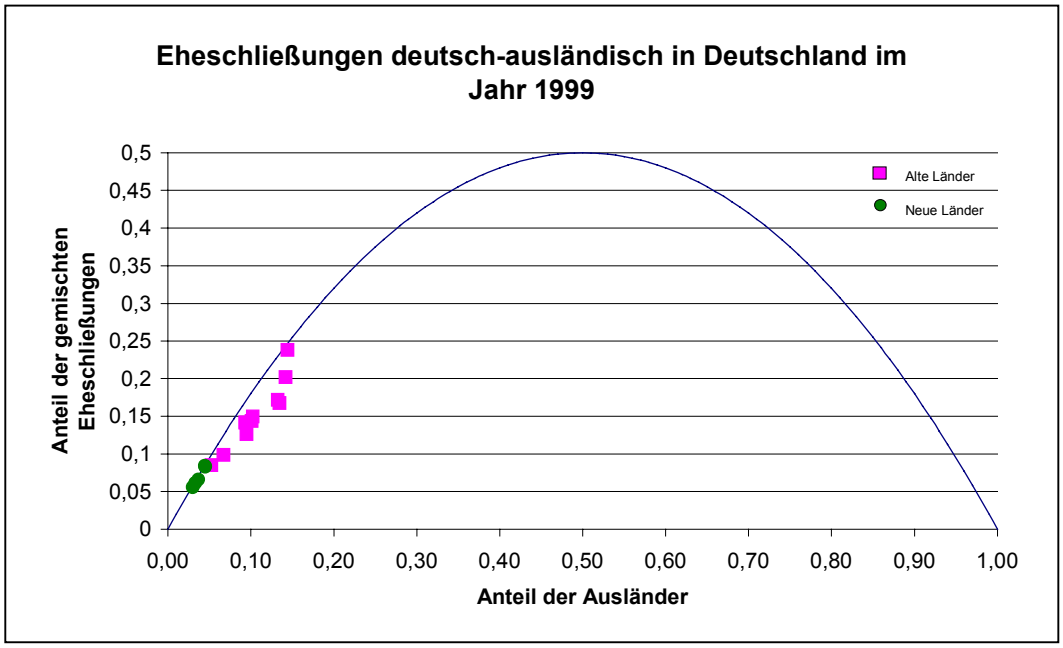


Abbildung D.4: Anteil der Heiraten zwischen Deutschen und Ausländern in den alten Bundesländern ("Quadrate") und in den neuen Bundesländern ("Kreise") für 1999.

7.5 Anhang E (Weiße, Schwarze, Sonstige)

Weitere Graphen zu "Weiße, Schwarze, Sonstige"

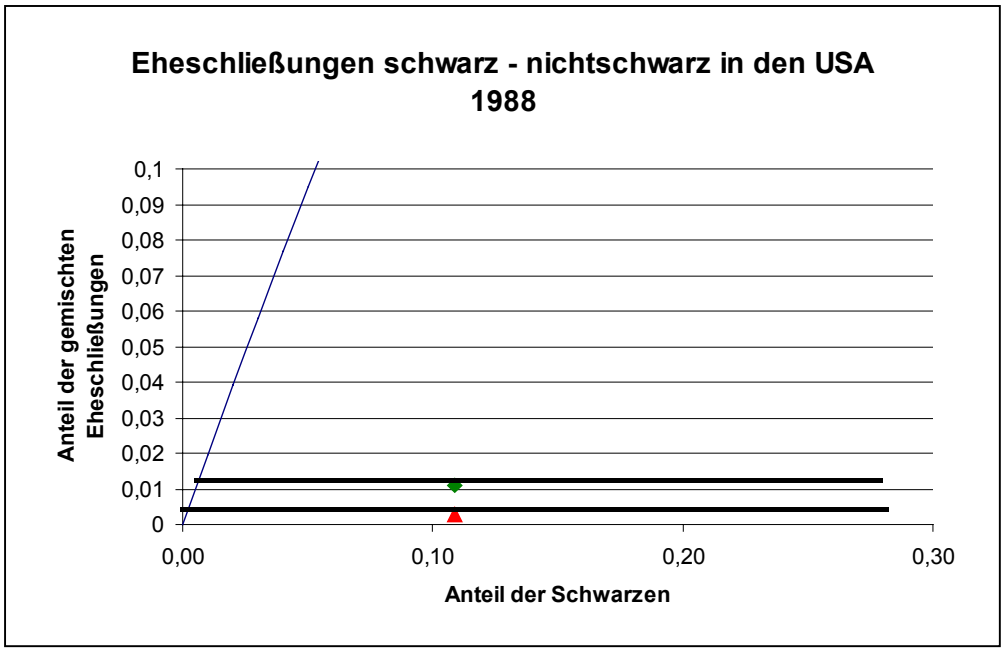


Abbildung E.1: Für die Jahre 1970 und 1988 sind die beiden Durchschnittswerte eingezeichnet. Es ergeben sich für die konstanten Heiratsraten die Werte 0,28 % (1970) und 1,09 % (1988).

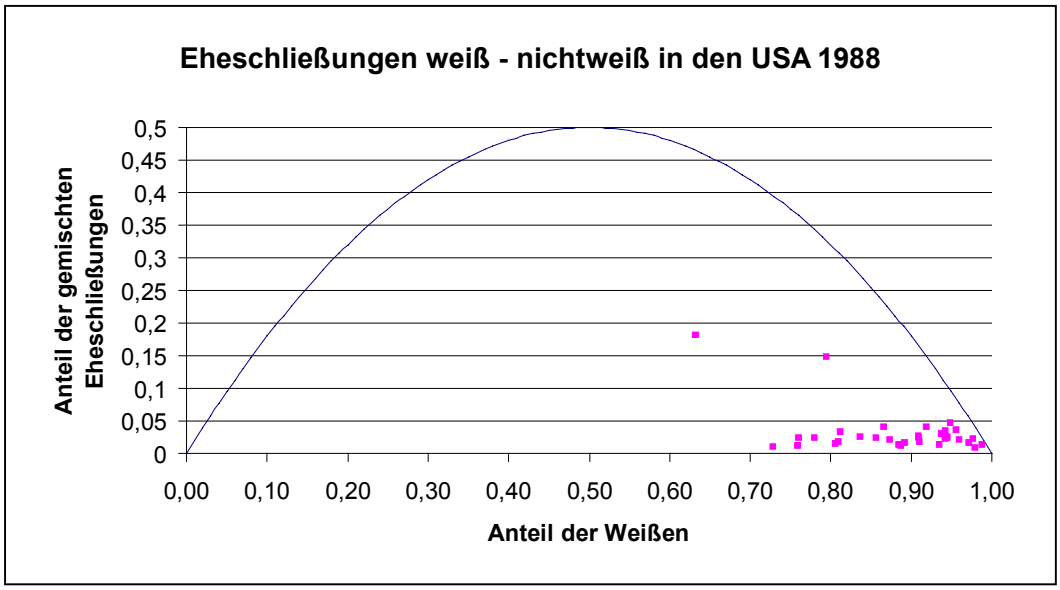


Abbildung E.2: Anteil der Heiraten zwischen Weißen und Nichtweißen in den USA im Jahr 1988. Auf der x-Achse ist der Anteil der *Weißen* dargestellt.

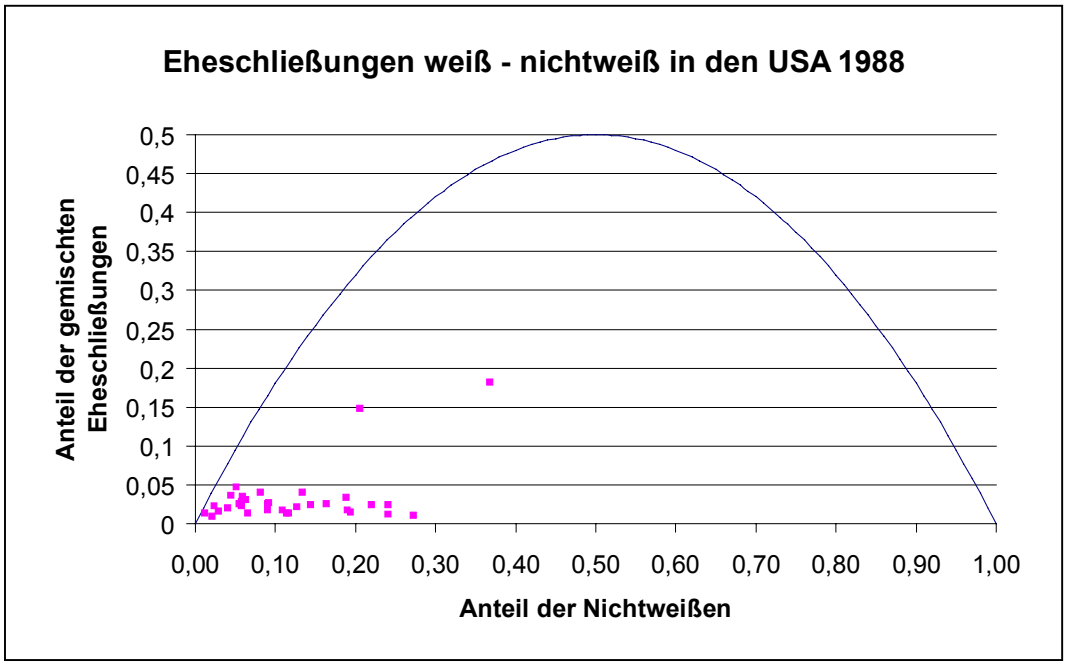


Abbildung E.3: Anteil der Heiraten zwischen Weißen und Nichtweißen in den USA im Jahr 1988. Auf der x-Achse ist der Anteil der *Nichtweißen* dargestellt. Dies vereinfacht den Vergleich mit den Daten aus den folgenden Diagrammen.

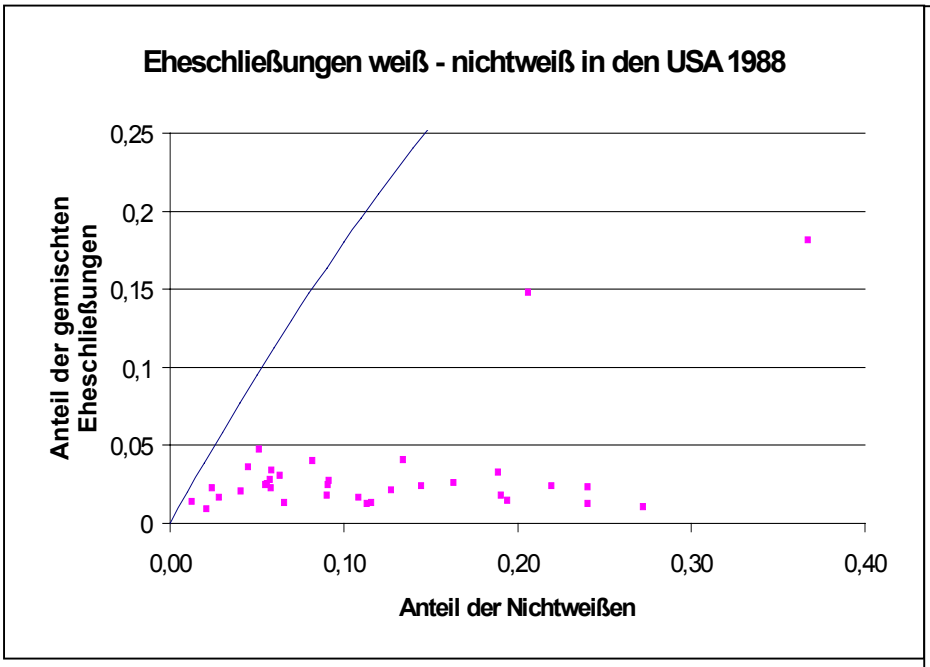


Abbildung E.4: Anteil der Heiraten zwischen Weißen und Nichtweißen in den USA im Jahr 1988. Auf der x-Achse ist der Anteil der *Nichtweißen* dargestellt. Aus der nebenstehenden Tabelle geht hervor, in welchem Staat es wie viele gemischte Ehen in Prozent gibt.

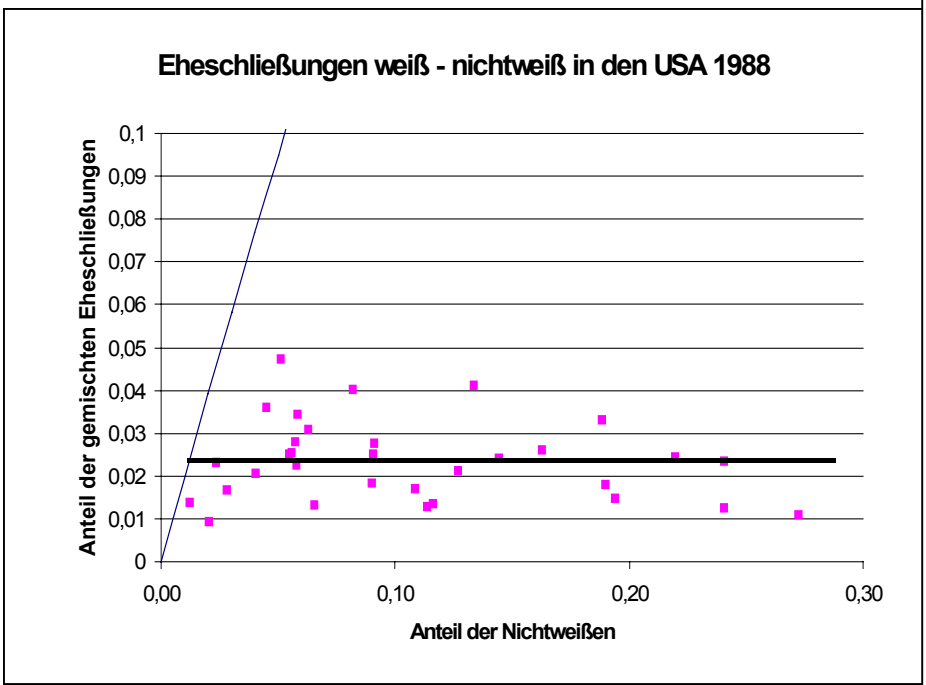


Abbildung E.5: Vergrößerung von Abbildung E.4: Die waagerechte Linie gibt den Durchschnittswert der Eheschließungen aller Staaten (außer Alaska und Hawaii) an; er liegt bei etwa 2,3 %.

Alabama	1,5 %
Alaska	14,8 %
Connecticut	2,5 %
Delaware	2,6 %
Florida	2,1 %
Georgia	2,4 %
Hawaii	18,2 %
Idaho	2,5 %
Illinois	1,3 %
Indiana	2,8 %
Kansas	4,0 %
Kentucky	1,3 %
Louisiana	1,3 %
Maine	1,7 %
Minnesota	4,1 %
Mississippi	1,1 %
Missouri	1,7 %
Montana	3,6 %
Nebraska	2,5 %
New Hampshire	2,3 %
New Jersey	2,4 %
North Carolina	1,8 %
Oregon	4,7 %
Pennsylvania	1,8 %
Rhode Island	3,1 %
South Carolina	2,4 %
South Dakota	3,4 %
Tennessee	1,3 %
Utah	2,8 %
Vermont	1,4 %
Virginia	3,3 %
West Virginia	0,9 %
Wisconsin	2,3 %
Wyoming	2,1 %

8 Literaturverzeichnis

[1]	Barrow, Gordon W.: *Physikalische Chemie : Gase, Flüssigkeiten, Festkörper und Mischphasen*. Bd. 2. 6., berichtigte Aufl. Braunschweig : Vieweg, 1985
[2]	Feuerpfeil, Jürgen ; Heigl, Franz: *Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik : Leistungskurs*. 3. Aufl. München : Bayerischer Schulbuch-Verlag, 1994
[3]	Fründ, Thorsten: *Analyse von Einkommen, Vermögen und Gesellschaft mit physikalischen Mitteln*. Paderborn, Universität, Fachbereich Physik, Staatsexamensarbeit, 2002
[4]	Greulich, Walter (Hrsg.): *Lexikon der Physik : in sechs Bänden*. Bd 1. Heidelberg : Spektrum, 1998
[5]	Greulich, Walter (Hrsg.): *Lexikon der Physik : in sechs Bänden*. Bd 2. Heidelberg : Spektrum, 1999
[6]	Hansen, Max: Constitution of binary alloys. 2. Aufl. New York : McGraw-Hill, 1958
[7]	Kilian, Ulrich ; Weber, Christine (Red.): *Lexikon der Physik : in sechs Bänden*. Bd 3. Heidelberg : Spektrum, 1999
[8]	Kittel, Charles: *Einführung in die Festkörperphysik.* 11. Aufl. München : R. Oldenbourg, 1996
[9]	Klein, Thomas (Hrsg.): *Partnerwahl und Heiratsmuster : Sozialstrukturelle Voraussetzungen der Liebe*. Opladen : Leske + Budrich, 2001
[10]	Krengel, Ulrich: *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik.* 5., neubearb. und erw. Aufl. Braunschweig : Vieweg, 2000
[11]	Mimkes, Jürgen: *Die atomisierte Gesellschaft : Die gesellschaftliche Evolution vom Kollektiv zum Individuum, von der Aggression zur Integration, von der Hierarchie zur globalen Freiheit*. Paderborn, Universität, Fachbereich Physik, Vorlesung, 2000
[12]	Mimkes, Jürgen: *Einführung in die Festkörper-Thermodynamik*. Paderborn, Universität, Fachbereich Physik, Vorlesung, 2001
[13]	Mimkes, Jürgen: *Vorlesungen zur Lagrange Statistik : Eine Einführung in die gemeinsamen Grundlagen von Gesellschaft, Wirtschaft, Politik und Thermodynamik*. Paderborn, Universität, Fachbereich Physik, Entwurf eines Manuskripts, 1999
[14]	Reiners, Ludwig (Hrsg.): *Der ewige Brunnen : ein Hausbuch deutscher Dichtung*. III. Sonderausg auf d. Grundlage d. 2., durchgearb. und erw. Ausg. 1959. München : C.H.Beck, 1995, S. 714
[15]	Statistische Ämter der Länder: Statistisches Landesamt Baden-Württemberg

	http://www.statistik.baden-wuerttemberg.de Bayerisches Landesamt für Statistik und Datenverarbeitung http://www.bayern.de/Ifstad Statistisches Landesamt Berlin http://www.statistik-berlin.de Landesamt für Datenverarbeitung und Statistik Brandenburg http://www.brandenburg.de/lds/index.html Statistisches Landesamt Bremen http://www.bremen.de/info/statistik Statistisches Landesamt Hamburg http://www.statistik-hamburg.de Hessisches Statistisches Landesamt http://www.hsl.de Statistisches Landesamt Mecklenburg-Vorpommern http://www.mvnet.de/inmv/stala Niedersächsisches Landesamt für Statistik http://www.nls.niedersachsen.de Landesamt für Datenverarbeitung und Statistik Nordrhein-Westfalen http://www.lds.nrw.de Statistisches Landesamt Rheinland-Pfalz http://www.statistik-rp.de Statistisches Landesamt Saarland http://www.statistik.saarland.de Statistisches Landesamt des Freistaates Sachsen http://www.statistik.sachsen.de Statistisches Landesamt Schleswig-Holstein http://www.statistik-sh.de Thüringer Landesamt für Statistik http://www.tls.thueringen.de
[16]	Statistisches Bundesamt Wiesbaden http://www.destatis.de
[17]	Stephan, Karl ; Mayinger, Franz: *Thermodynamik : Mehrstoffsysteme und chemische Reaktionen*. Bd. 2. 14., neubearb. und erw. Aufl. Berlin : Springer, 1999
[18]	U.S. Census Bureau http://www.census.gov/
[19]	Vogel, Helmut: *Gerthsen Physik*. 19. Aufl. Berlin : Springer, 1997
[20]	von Baratta, Mario (Hrsg.): *Der Fischer Weltalmanach 2001*. Frankfurt am Main :

	Fischer Taschenbuch Verlag, 2000
[21]	Walz, Guido (Red.): *Lexikon der Mathematik : in sechs Bänden*. Bd. 2. Heidelberg : Spektrum, 2001
[22]	Weidlich, Wolfgang: *Concepts and models of a quantitative sociology : the dynamics of interacting populations*. Berlin : Springer,1983
[23]	Zentner, Christian: *Der Tag der Einheit : Deutschland am 3. Oktober 1990*. Köln : Lingen, 1990
[24]	*Zuwanderung gestalten – Integration fördern* [online]. Copyright: Unabhängige Kommission "Zuwanderung", letzte Aktualisierung: 4. Juli 2001, erhältlich im Internet unter http://www.bmi.bund.de/top/dokumente/artikel/ix_46876.htm

Erklärung

"Ich versichere, dass ich die schriftliche Hausarbeit selbstständig verfasst und keine anderen Quellen und Hilfsmittel als die angegebenen benutzt habe. Alle Stellen der Arbeit, die dem Wortlaut oder dem Sinn nach anderen Werken entnommen sind, habe ich in jedem einzelnen Fall unter genauer Angabe der Quelle deutlich als Entlehnung kenntlich gemacht. Das gleiche gilt auch für die beigegebenen Zeichnungen, Kartenskizzen und Darstellungen."

Paderborn, den 16. Juni 2002

Christian Denk