

## 4 Kinematik der Translation

- 4.1 Koordinatensysteme
- 4.2 Elementare Bewegungen

## 5 Kinematik der Rotation (Drehbewegungen)

## 6 Dynamik der Translation

- 6.1 Die Newton'sche Axiome
  - 6.1.1 Erstes Newton'sches Axiom
  - 6.1.2 Zweites Newton'sches Axiom
  - 6.1.3 Drittes Newton'sches Axiom
- 6.2 Das Superpositionsprinzip (principle of superposition)
- 6.3 Anwendung der Axiome

## 4.2 Elementare Bewegungen

### Der schiefe Wurf (Überlagerung zweier Bewegungen)

Prinzip der ungestörten Superposition: Die Einzelbewegungen beeinflussen sich nicht, jede Einzelbewegung läuft so ab, als ob sie allein vorhanden wäre.

(Folge des Superpositionsprinzips von Einzelkräften  $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$ )

Bei allen Würfen überlagert sich eine Bewegung mit

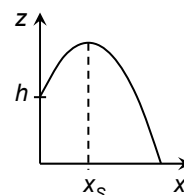
$\vec{v}_0 = \text{const.}$  und der freie Fall

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_{\text{Fall}}$$

**vektorielle Addition**

Als Startpunkt wählen wir:

$$x(0) = 0, y(0) = 0 \text{ und } z(0) = h, \text{ d. h. } \vec{x}(t=0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{bmatrix}$$



und legen die  $x$ -Achse so, dass die Wurfbahn in die  $xz$ -Ebene fällt.

Die Anfangsgeschwindigkeit bzw. -beschleunigung sei

$$\vec{v}(t=0) = \begin{bmatrix} v_x(t=0) \\ v_y(t=0) \\ v_z(t=0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{0,x} \\ 0 \\ v_{0,z} \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \vec{a}(t=0) = \begin{bmatrix} a_x(t=0) \\ a_y(t=0) \\ a_z(t=0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix}$$

Die resultierende Geschwindigkeit:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{g} \cdot t \Rightarrow \vec{v}(t) = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{0,x} \\ 0 \\ v_{0,z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} \cdot t = \begin{bmatrix} v_{0,x} + 0 \cdot t \\ 0 + 0 \cdot t \\ v_{0,z} - g \cdot t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{0,x} \\ 0 \\ v_{0,z} - g \cdot t \end{bmatrix}$$

Entsprechend bestimmen wir den „Wegvektor“:

$$\vec{s}(t) = \vec{s}_0 + \vec{v}_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \vec{a} \cdot t^2 = \vec{s}_0 + \vec{v}_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \vec{g} \cdot t^2$$

$$\vec{s}(t) = \begin{bmatrix} s_x(t) \\ s_y(t) \\ s_z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{0,x} \\ s_{0,y} \\ s_{0,z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{0,x} \cdot t \\ v_{0,y} \cdot t \\ v_{0,z} \cdot t \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} g_{0,x} \cdot t^2 \\ g_{0,y} \cdot t^2 \\ g_{0,z} \cdot t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{0,x} + v_{0,x} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g_{0,x} \cdot t^2 \\ s_{0,y} + v_{0,y} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g_{0,y} \cdot t^2 \\ s_{0,z} + v_{0,z} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g_{0,z} \cdot t^2 \end{bmatrix}$$

$$\text{mit } \vec{s}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_0 = \begin{bmatrix} v_{0,x} \\ 0 \\ v_{0,z} \end{bmatrix}, \quad \vec{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix}$$

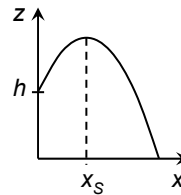
$$\vec{s}(t) = \begin{bmatrix} 0 + v_{0,x} \cdot t + 0 \\ 0 + 0 + 0 \\ h + v_{0,z} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{0,x} \cdot t \\ 0 \\ h + v_{0,z} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}x(t) &= v_{0,x} \cdot t \\y(t) &= 0 \\z(t) &= -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_{0,z} \cdot t + h\end{aligned}$$

Die Bewegung ist also eine Überlagerung einer gleichförmig geradlinigen Bewegung in x-Richtung und einer gleichförmig beschleunigten Bewegung in z-Richtung.

Eliminieren von  $t = x/v_{0,x}$  gibt die **Wurfparabel** (siehe Abbildung)

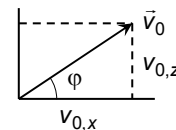
$$z(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{g}{v_{0,x}^2} \cdot x^2 + \frac{v_{0,z}}{v_{0,x}} \cdot x + h$$



## 4.2 Elementare Bewegungen

Ihr Scheitel liegt bei dem x-Wert, für den  $dz/dx = 0$  ist.

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dx} &= 0 = -\frac{g}{v_{0,x}^2} \cdot x_S + \frac{v_{0,z}}{v_{0,x}} \\ \Rightarrow x_S &= \frac{v_{0,z} \cdot v_{0,x}}{g} = \frac{|\vec{v}_0| \cdot \sin \varphi \cdot |\vec{v}_0| \cdot \cos \varphi}{g} = \frac{\vec{v}_0^2 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi}{g}\end{aligned}$$



$$x_S = \frac{v_0^2 \cdot \sin(2\varphi)}{2g}$$

Der Scheitel hat also bei vorgegebener Abwurfgeschwindigkeit  $\vec{v}_0$  seinen größten Wert für  $\varphi = 45^\circ$ .

Um die Wurfweite bei schrägem Wurf zu berechnen, setzen wir  $z(x_W) = 0$ .

$$0 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{g}{v_{0,x}^2} \cdot x_W^2 + \frac{v_{0,z}}{v_{0,x}} \cdot x_W + h$$

$$0 = x_W^2 - \frac{2 \cdot v_{0,x} \cdot v_{0,z}}{g} \cdot x_W - \frac{2 \cdot v_{0,x}^2}{g} \cdot h$$

$$\Rightarrow x_W = \frac{v_{0,x} \cdot v_{0,z}}{g} \pm \sqrt{\left(\frac{v_{0,x} \cdot v_{0,z}}{g}\right)^2 + \frac{2 \cdot v_{0,x}^2}{g} \cdot h}$$

Da  $x_W > 0$  sein muss, kommt nur das positive Vorzeichen in Frage. Wegen

$$v_{0,z} \cdot v_{0,x} = \frac{1}{2} \cdot \bar{v}_0^2 \cdot \sin(2\varphi)$$

lässt sich diese Formel umformen zu

$$x_W = \frac{\bar{v}_0^2}{2g} \cdot \sin(2\varphi) \cdot \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{2g \cdot h}{\bar{v}_0^2 \cdot \sin^2 \varphi}} \right]$$

## 4.2 Elementare Bewegungen

Will man wissen, für welchen Winkel bei festem Betrag  $v_0$  der Anfangsgeschwindigkeit die größte Wurfweite erzielt wird, so muss  $dx_W/d\varphi = 0$  gesetzt werden.

Ergebnis:

$$\varphi_{\text{opt}_{x_W}} = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2 + 2g \cdot h/v_0^2}}\right) \stackrel{h=0}{=} 45^\circ$$

## § 5 Dynamik der Rotation

10

Eine häufig auftretende Form der Bewegung ist die Drehung um einen Punkt oder um eine Achse. Zur Beschreibung von Drehbewegungen benutzt man einige besondere Begriffe, die im folgenden vorgestellt werden. Bei einer Kreisbewegung ist lediglich der zweite Term in

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{e}_r + r(t) \cdot \frac{d\vec{e}_r}{dt}$$

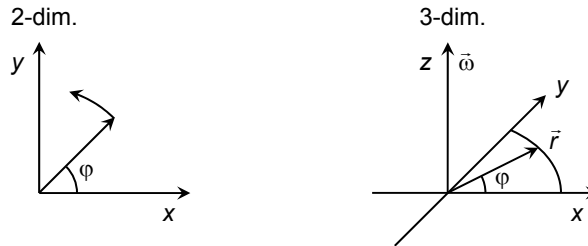
von Null verschieden und  $r$  zeitlich konstant.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = r \cdot \frac{d\vec{e}_r}{dt}$$

|  
Betrag von  $\vec{r}$

/ zeitliche Änderung des Richtungsvektors  
(Kreisbewegung)

Wir wollen die Änderung des Einheitsvektors mit dem Winkel  $\varphi$  beschreiben, den der Vektor mit einer Referenzachse hat.



(links) Bei einer Kreisbewegung in zwei Dimensionen rotiert der Ortsvektor mit konstanter Länge um einen festen Punkt; seine Lage wird durch den Winkel  $\varphi$  angegeben.

(rechts) Der Vektor, der in drei Dimensionen die Drehbewegung repräsentiert, steht senkrecht auf der Ebene, in der die Bewegung stattfindet. Der Drehsinn ist durch die Rechte-Hand-Regel gegeben.

Damit ist für eine Kreisbewegung:

$$|\vec{v}| = r \cdot \frac{d\varphi}{dt}$$

Die zeitliche Änderung des Winkels assoziiert man mit einer Größe  $\omega$ , die **Winkelgeschwindigkeit** heißt und die so definiert ist

$$\omega := \frac{d\varphi}{dt}$$

Einer Drehung um  $360^\circ$  entsprechen  $2\pi$  rad (Taschenrechner!). Der Betrag der Geschwindigkeit eines Massenpunktes auf einer Kreisbewegung ist mit  $\omega$  ausgedrückt

$$|\vec{v}| = v = \omega \cdot r$$

(Kreisbewegung)

Es ergibt sich noch die Frage, wie man den **Drehsinn** festlegt, denn links herum ist nicht dasselbe wie rechts herum.

Man hat sich international geeinigt, die Schraubenbewegung der rechten Hand zugrunde zu legen.

Man verfährt wie folgt:

Zeigt ein Vektor  $\vec{\omega}$  in Richtung des Daumens, so geben die restlichen Finger der rechten Hand die Drehbewegung an.  
(Zeigefinger entspricht  $\vec{r}$ , Mittelfinger  $\vec{v}$ )

Will man die Kreisbewegung vektoriell ausdrücken, so benutzt man das **Vektorprodukt** oder **Kreuzprodukt**, das so heißt, weil das Resultat wieder ein Vektor ist.

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Der Drehsinn wird wieder durch die rechte Hand angegeben. Zeigt  $\vec{\omega}$  in Daumenrichtung und  $\vec{r}$  in Zeigefingerrichtung, dann zeigt  $\vec{v}$  in Richtung des Mittelfingers.

Betragsmäßig ist

$$|\vec{\omega} \times \vec{r}| = \omega \cdot r \cdot \sin \alpha$$

wobei  $\alpha$  der Winkel zwischen  $\vec{\omega}$  und  $\vec{r}$  ist.

Im Falle der Kreisbewegung ist  $\alpha = 90^\circ$  und es folgt

$$|\vec{v}| = |\vec{\omega} \times \vec{r}| = \omega \cdot r \cdot \sin 90^\circ = \omega \cdot r$$

Man beachte, dass

$$\vec{r} \times \vec{\omega} = -(\vec{\omega} \times \vec{r})$$

ist, dass also eine Vertauschung von Vektoren im Kreuzprodukt mit einer Vorzeichenumkehr eingeht (Nicht so im Skalarprodukt!).

Nachdem jetzt die Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}$  als Vektor ausgedrückt werden kann, müssen auch die damit zusammenhängenden Größen  $\vec{\varphi}$  und  $\vec{\alpha}$  (Winkelbeschleunigung) als Vektoren dargestellt werden.

$\vec{\varphi}$  und  $\vec{\alpha}$  sind parallel zur Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}$  gerichtet, da

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} = \dot{\vec{\varphi}}$$

und damit die **Winkelbeschleunigung**  $\vec{\alpha}$

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \dot{\vec{\omega}} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2} = \ddot{\vec{\varphi}}$$

Für die Einheiten gilt:

$$[\vec{\varphi}] = 1 \text{ Radiant} = 1 \text{ rad}$$

$$[\vec{\omega}] = \frac{1 \text{ rad}}{\text{s}} = \text{s}^{-1}$$

$$[\vec{\alpha}] = \frac{1 \text{ rad}}{\text{s}^2} = \text{s}^{-2}$$

### Weitere Kenngrößen der Drehung

$$\text{Drehzahl } n \quad n := \frac{|\vec{\omega}|}{2\pi}$$

$$\text{Periodendauer } T \quad T := \frac{1}{n} = \frac{2\pi}{|\vec{\omega}|}$$

$$\text{Zahl der Umdrehungen } N \quad N := \frac{|\vec{\varphi}|}{2\pi}$$

### Bewegungsgleichungen der Rotation

Sie werden in völliger Analogie zur Translation gebildet.

$$\vec{\alpha}(t) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \Rightarrow d\vec{\omega} = \vec{\alpha}(t) \cdot dt$$

$$\text{Integration:} \quad \int_{\vec{\omega}_0}^{\vec{\omega}} d\vec{\omega} = \int_0^t \vec{\alpha}(t) dt$$



$$\bar{\omega} - \bar{\omega}_0 = \int_0^t \bar{\alpha}(t) dt \quad \bar{\omega}_0 : \text{Anfangswinkelgeschwindigkeit bei } t = 0$$

$$\bar{\omega}(t) = \bar{\omega}_0 + \int_0^t \bar{\alpha}(t) dt$$

Der Winkelgeschwindigkeitszuwachs ist gleich dem Zeitintegral über die Winkelbeschleunigung.

$$\bar{\omega}(t) = \frac{d\bar{\varphi}}{dt} \Rightarrow d\bar{\varphi} = \bar{\omega}(t) \cdot dt$$

$$\bar{\varphi}(t) = \bar{\varphi}_0 + \int_0^t \bar{\omega}(t) d\bar{\omega}$$

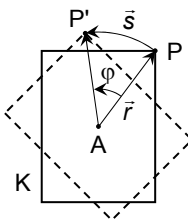
$\varphi_0$  : Anfangswinkel bei  $t = 0$  (häufig ist  $\varphi_0 = 0$ )

Anwendung auf zwei einfache Sonderfälle:

- die gleichförmige Kreisbewegung mit  $\bar{\alpha} = 0$
- die gleichmäßig beschleunigte Kreisbewegung mit  $\bar{\alpha} = \text{const.}$

### Zusammenhang zwischen der Rotation eines starren Körpers und der Bahnbewegung seiner einzelnen Punkte

Der Körper K möge sich um den Winkel  $\bar{\varphi}$  drehen. Ein beliebiger Punkt P, der von der Drehachse A den Abstand  $|\vec{r}| = r$  hat, legt dabei den Kreisbahnabschnitt  $\vec{s}$  zurück.



$$\bar{\varphi} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varphi \end{bmatrix} \quad \text{schaut aus der Ebene heraus}$$

$$\vec{s} = \bar{\varphi} \times \vec{r} \quad \text{Kreisabschnitt}$$

$$s = |\vec{s}| = |\bar{\varphi}| \cdot |\vec{r}| \cdot \sin \Theta \stackrel{\Theta=90^\circ}{=} |\bar{\varphi}| \cdot |\vec{r}| = \varphi \cdot r$$

$$[\varphi] = 1 \text{ rad (Bogenmaß)}$$

Die Bahngeschwindigkeit  $\vec{v}$  ergibt sich dabei zu:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{d}{dt}[\vec{\varphi} \times \vec{r}] = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\varphi} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \underbrace{\frac{d\vec{\varphi}}{dt}}_{=0} \times \vec{r} + \underbrace{\vec{\varphi}}_{:=\vec{\omega}}$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

**Bahngeschwindigkeit**

$$v = |\vec{v}| = |\vec{\omega}| \cdot |\vec{r}| \cdot \sin \Theta \stackrel{\Theta=90^\circ}{=} |\vec{\omega}| \cdot |\vec{r}| = \omega \cdot r$$

Entsprechend folgt für die Kreisbeschleunigung  $\vec{a}$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}[\vec{\omega} \times \vec{r}] = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}$$

$$\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{a}_{\text{tangential}} + \vec{a}_{\text{zentripetal}}$$

Da  $\vec{r}$  senkrecht auf  $\vec{v}$  steht, steht damit auch  $\vec{a}_{\text{tangential}}$  senkrecht auf  $\vec{a}_{\text{zentripetal}}$ .

Wenn wir uns die Vektoren jetzt richtungsmäßig anschauen, sehen wir:

- a)  $\vec{a}_{\text{tangential}}$  parallel zur Bahngeschwindigkeit  $\vec{v}$
- b)  $\vec{a}_{\text{zentripetal}}$  immer zum Drehpunkt A gerichtet

Betrag der Tangentialbeschleunigung:

$$a_{\text{tangential}} = |\vec{a}_{\text{tangential}}| = |\alpha \times r| = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{r}| \cdot \sin \Theta \stackrel{\Theta=90^\circ}{=} \alpha \cdot r$$

$$a_{\text{tangential}} = \alpha \cdot r$$

Betrag der Zentripetalbeschleunigung:

$$a_{\text{zentripetal}} = |\vec{a}_{\text{zentripetal}}| = |\vec{\omega} \times \vec{v}| = |\vec{\omega}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin \Theta \stackrel{\Theta=90^\circ}{=} \omega \cdot v \stackrel{v=\omega \cdot r}{=} \omega^2 \cdot r \stackrel{\omega=v/r}{=} v^2/r$$

$$a_{\text{zentripetal}} = v^2/r = \omega^2 \cdot r$$

Bewegungsgrößen	gleichmäßige Kreisbewegung	gleichmäßig beschleunigte Kreisbewegung	gleichmäßig beschleunigte Kreisbewegung
	$\varphi(t_0) = \varphi_0$	$\varphi(t_0) = \varphi_0, \omega(t_0) = \omega_0$	$\varphi_0 = 0, \omega_0 = 0, t_0 = 0$
Winkelbeschleunigung	$\alpha = 0$	$\alpha = \alpha_0$	$\alpha = \alpha_0$
Winkelgeschwindigkeit	$\omega = \omega_0$	$\omega = \omega_0 + \alpha \cdot (t - t_0)$	$\omega = \alpha_0 \cdot t = \sqrt{2\alpha_0 \cdot \varphi}$
Drehwinkel	$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 \cdot (t - t_0)$	$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha_0(t - t_0)^2$	$\varphi = \frac{1}{2}\alpha_0 \cdot t^2 = \frac{\omega^2}{2\alpha_0} = 2\pi \cdot N$
Umfangsgeschwindigkeit	$v = r \cdot \omega_0$	$v = r \cdot [\omega_0 + \alpha_0 \cdot (t - t_0)]$	$v = r \cdot \alpha_0 \cdot t$
Zentripetalbeschleunigung	$a_{zp} = r \cdot \omega_0^2$	$a_{zp} = r \cdot [\omega_0 + \alpha_0 \cdot (t - t_0)]^2$	$a_{zp} = r \cdot \alpha_0^2 \cdot t^2$
Tangentialbeschleunigung	$a_{tan} = 0$	$a_{tan} = \alpha_0 \cdot r$	$a_{tan} = \alpha_0 \cdot r$